**Алгоритм построения развертки поверхностей**

А.В. Замятин, Е.А. Замятина

Многие поверхности, применяемые при проектировании современных зданий и сооружений, изготавливаются из плоских материалов (металл, пластик, фанера и т.д.). Для изготовления таких поверхностей необходимо выполнить их развертку. В статье приведен алгоритм построения условной развертки поверхностей методом триангуляции [1, 2]. Алгоритм реализован в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [3] на языке *С++*[4].

Рассмотрим построение условной развертки нелинейчатой поверхности методом триангуляции. Пусть задана нелинейчатая поверхность сетью, представляющей собой два пересекающихся набора линий *li* и *mj* (рис. 1).



Рис. 1 Развертка поверхности методом триангуляции

Возьмем отсек поверхности, ограниченны криволинейным четырехугольником *ABCD*. Заменим отрезки кривых, ограничивающих заданный отсек, на отрезки прямых. Так как отрезки линий имеют небольшую длину, погрешность будет не велика. Построим диагональ *AC* четырехугольника. Найдем натуральную величину треугольника *ABC* – треугольник *A’B’C’* (на рис. 1 эта натуральная величина обозначена н.в. Δ*ABC*). К общей стороне *A’B’* достроим натуральную величину треугольника ADC – треугольник A’D’C’(на рис. 1 – н.в. Δ*ADC*). Построенный таким образом плоский четырехугольник *A’B’C’D’,* является условной разверткой отсека поверхности *ABCD.* Выполняя данную операцию для всего отсека заданной поверхности, получи его условную развертку.

Рассмотрим вопрос определения натуральных величин треугольников. Для этого необходимо привести плоскость треугольника в положение плоскости уровня, т.е. сделать ее параллельной одной из плоскостей проекций. Алгоритм решения данной задачи, основанный на двух поворотах вокруг осей координат, приведен в [5]. В рассматриваемом алгоритме плоскости треугольников совмещались с координатной плоскостью *xOy* поворотом вокруг горизонтального следа плоскости. Данный метод в начертательной геометрии называется методом совмещения [2]. Пусть в пространстве задан треугольник *ABC* (рис. 2)*.* Координаты вершин треугольника обозначим *A (xA yA zA), B (xB yB zB), C (xC yC zC).*



Рис. 2 Совмещение плоскости треугольника с плоскостью xOy

Для удобства, выполним параллельный перенос треугольника таким образом, чтобы точка *A,* в новом положении, находилась в начале системы координат*.* После проведенного преобразования координаты точки $A' \left(\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\right)$, координаты точек *B’* и *C’* найдем по соотношению

*(x’ y’ z’)=(x y z)- (xA yA zA).*  (1)

Уравнение плоскости треугольника имеет вид [6]

$\left|\begin{matrix}x&y&z\\x\_{B}^{'}&y\_{B}^{'}&z\_{B}^{'}\\x\_{C}^{'}&y\_{C}^{'}&z\_{C}^{'}\end{matrix}\right|=0. $ (2)

Запишем уравнение (2) в виде

 *Ax* + *Bx* + *Cx* = 0, (3)

где

 $A=\left|\begin{matrix}y\_{B}^{'}&z\_{B}^{'}\\y\_{C}^{'}&z\_{C}^{'}\end{matrix}\right|; B=-\left|\begin{matrix}x\_{B}^{'}&z\_{B}^{'}\\x\_{C}^{'}&z\_{C}^{'}\end{matrix}\right|; C==\left|\begin{matrix}x\_{B}^{'}&y\_{B}^{'}\\x\_{C}^{'}&y\_{C}^{'}\end{matrix}\right|.$

Уравнение горизонтального следа плоскости *h*0 определяется следующей системой уравнений

 $\left\{\begin{matrix}Ax+By+Cz=0,\\z=0.\end{matrix}\right.$ (4)

Координаты направляющего вектора горизонтального следа плоскости, с учетом (4), равны $\vec{N\_{h} } \left\{\begin{matrix}B&-A&0\end{matrix}\right\}$. Обозначим направляющий единичный вектор следа и его координаты через $\vec{n} \left\{\begin{matrix}k&l&m\end{matrix}\right\}$. *k, l,* m – направляющие косинусы *h0*, равные

$k=\frac{B}{\sqrt{A^{2}+B^{2}}};l=-\frac{A}{\sqrt{A^{2}+B^{2}}};m=0.$ (5)

Определим угол, который составляет вектор нормали плоскости (3) $\vec{N} \left\{\begin{matrix}A&B&C\end{matrix}\right\}$ с осью *Oz*

$φ=arccos\frac{C}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}}.$ (6)

Повернем заданный треугольник вокруг горизонтального следа плоскости *h*0 на угол *φ.* Плоскость треугольника *ABC* совместится с координатной плоскостью *xOy*. Точка *A’’,* останется в начале координат, координаты точек *B’’* и *C’’* найдем по формуле [7]

$\left(\begin{matrix}x''&y''&z''\end{matrix}\right)=Π\left(φ,k,l,m\right)\left(\begin{matrix}x'&y'&z'\end{matrix}\right)$, (7)

где

$Π\left(φ,k,l,m\right)=$

 $=\left(\begin{matrix}k^{2}+\cos(φ\left(1-k^{2}\right))&kl\left(1-\cos(φ)\right)-m\sin(φ)&km\left(1-\cos(φ)\right)+l\sin(φ)\\kl\left(1-\cos(φ)\right)+m\sin(φ)&l^{2}+\cos(φ)\left(1-l^{2}\right)&lm\left(1-\cos(φ)\right)-k\sin(φ)\\km\left(1-\cos(φ)\right)-l\sin(φ)&lm\left(1-\cos(φ)\right)+k\sin(φ)&m^{2}+\cos(φ)\left(1-m^{2}\right)\end{matrix}\right)$.

Пусть в пространстве заданы два треугольника *ABC* и *DEF*, имеющие общие стороны *DF.* Описанным выше способом, преобразуем их таким образом, чтобы они находились в координатной плоскости *xOy* (рис. 3)*.*



Рис. 3 Совмещение треугольников

Совместим эти треугольники вдоль общих сторон *A’’C’’* и *D’’F’’,* причем,, чтобы вершины *B’’* и *E’’*  располагались по разные стороны относительно совпадающих сторон*.* Определим угол между векторами $\vec{A''C''}$ и $\vec{D''F''}$

 $θ=arccos\frac{x\_{C}^{''}x\_{F}^{''}+y\_{C}^{''}y\_{F}^{''}+z\_{C}^{''}z\_{F}^{''}}{\sqrt{x\_{C}^{''2}+y\_{C}^{''2}+z\_{C}^{''2}}\sqrt{x\_{F}^{''2}+y\_{F}^{''2}+z\_{F}^{''2}}}$.

Повернем треугольник *D’’E’’F’’,* вокруг оси *Oz*. Новые координаты точек этого треугольника, получим по соотношению

 $\left(\begin{matrix}x'''&y'''&z'''\end{matrix}\right)=Π\left(θ,0,0,1\right)\left(\begin{matrix}x''&y''&z''\end{matrix}\right)$.

Проверим, находятся ли вершины треугольников по разные стороны, относительно общих сторон. Запишем уравнение прямой *A’’C’’* на плоскости *xOy*, учитывая, что точка *A’’* находится в начале координат

 $\left|\begin{matrix}x&y\\x\_{C}^{''}&y\_{C}^{''}\end{matrix}\right|=0$

или

$A\_{1}x+B\_{1}=0$,

где $A\_{1}=y\_{C}^{''}$, $B\_{1}=-x\_{C}^{''}$. Если

$Sgn\left(A\_{1}x\_{D}^{'''}+B\_{1}y\_{D}^{'''}\right)=Sgn\left(A\_{1}x\_{B}^{''}+B\_{1}y\_{B}^{''}\right)$,

то вершины находятся по одну сторону относительно общих сторон, поэтому повернем треугольник *D’’E’’F’’* вокруг совпадающих сторон на угол равный π. При данном преобразовании изменятся только координаты точки *D’’,* найдем их по формуле

$\left(\begin{matrix}x''''&y''''&z''''\end{matrix}\right)=Π\left(π,k\_{1},l\_{1},m\_{1}\right)\left(\begin{matrix}x'''&y'''&z'''\end{matrix}\right)$,

где *k1, l1, m1* – направляющие косинусы совпавших сторон, вычисляемые по соотношениям, аналогичным (5).

 Выполняя приведенные операции для всего заданного отсека поверхности, построим его условную развертку.

 Пример работы алгоритма, приведен на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлена заданная поверхность. Поверхность строилась по алгоритму, описанному [8]. На рис. 5 – построенная развертка данной поверхности.



Рис. 4 Заданная поверхность



Рис. 5 Развертка поверхности

 Описанный алгоритм интегрирован в систему *AutoCAD*, что позволяет использовать его для построения разверток поверхностей, созданных в данной системе. Алгоритм также может быть использован в качестве модуля автоматизированных систем проектирования.

**Литература**

1. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия [Текст] / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высшая школа, 1973. – 436 с.
2. Фролов, С.А. Начертательная геометрия [Текст] / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
3. Полищук, Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация [Текст] / Н.Н. Полищук. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 992 с.
4. Секунов, Н.Ю. Visual C++ Визуальная среда программирования [Текст] / Н.Ю.Секунов. – СПб.: БХВ – Петербург, 1999. – 960 c.
5. Замятин, А.В. Алгоритм построения точек пересечения нелинейчатых поверхностей [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2010, №3. – Режим доступа: [<http://www.ivdon.ru/magazine/issue/95>/](http://www.ivdon.ru/) (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.
6. Александров, П.С. Лекции по аналитическая геометрии [Текст] / П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
7. Фокс А. Пратт М. Вычислительная геометрия [Текст] / А. Фокс, М. Пратт. –М.: Мир, 1982. – 304 с.
8. Замятин А.В., Сухомлинова В.В. Алгоритмы визуализации нелинейчатых поверхностей // Известия вузов. Северокавказский регион. Технические науки, 2010. – №6. – С. 30-39.