

## Исследование напряжений возле плоского горизонтального выреза

П.В. Дородов

Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, г. Ижевск, Удмуртия

А.В. Кулагин

Камский институт гуманитарных и инженерных технологий, г. Ижевск, Удмуртия

Часто детали машин и строительные конструкции имеют технологические вырезы, ослабляющие их (рис. 1). Под действием внешних нагрузок возле краев таких вырезов возникает концентрация напряжений, приводящая к возникновению трещин или больших остаточных деформаций, что является недопустимым явлением.

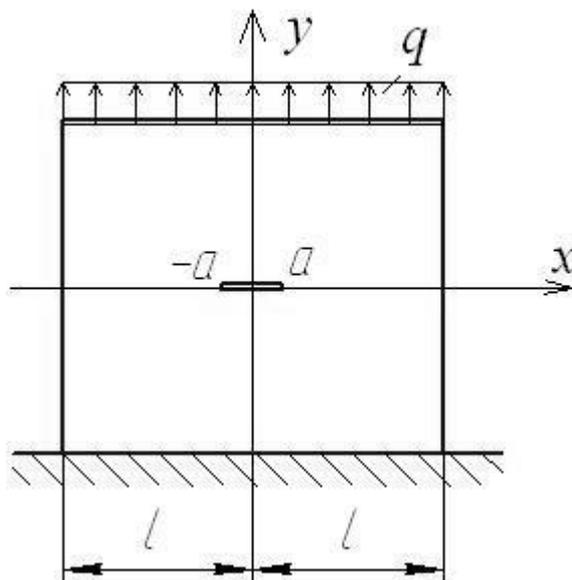


Рис. 1 Расчетная схема прямоугольной полосы с горизонтальным вырезом

Задача является актуальной проблемой прочности, так как аналитические решения, при условии их корректности и правильного задания дополнительных краевых условий, позволяют решать не только прямые, но и обратные задачи. Основные трудности в решении связаны с определением напряжений на линии сопряжения, совпадающей с осью  $x$ . Для решения этой задачи используем характеристическую часть сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами  $A$  и  $B$  на отрезке  $[-a; a]$  [1]:

$$A\varphi(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x),$$

где  $f(x) = \frac{du}{dx} - i \frac{dv}{dx}$ ,  $u, v$  – перемещения точек линии сопряжения;  
 $\varphi(x) = \sigma_y^0(x) + i\tau_{xy}^0(x)$ ;  $\sigma_y^0(x), \tau_{xy}^0(x)$  – нормальные и касательные напряжения на линии сопряжения.

В случае неограниченного решения в узлах  $x = \pm a$  имеем:

$$\varphi(x) = A^* f(x) + \frac{B^*}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} f(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{C}{i\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (1)$$

где  $A^*, B^*, C$  – постоянные.

Допустим, что на линии интегрирования  $|L| \geq a$  перемещения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= -\delta, \\ u(x) &= \delta_1 x, \end{aligned} \right\}$$

где  $\delta, \delta_1$  – некоторые постоянные.

Тогда

$$f(x) = \delta_1,$$

а выражение (1) можно переписать

$$\varphi(x) = A^* \delta_1 + \frac{B^*}{\pi} \frac{\delta_1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \frac{C}{i\sqrt{x^2 - a^2}},$$

из которого, разделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^0(x) &= A^* \delta_1 - \frac{B^* \delta_1 x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = A_1 - \frac{B_1 x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \\ \tau_{xy}^0(x) &= -\frac{C}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \end{aligned} \right\}$$

где  $A_1 = A^* \delta_1$ ,  $B_1 = B^* \delta_1$ , – постоянные, зависящие от упругих свойств и внешней нагрузки.

Для их определения составим условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_a^l \sigma_y^0 dx &= 2ql, \\ 2 \int_a^l \tau_{xy}^0 dx &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A_1(l-a) - B_1 \sqrt{l^2 - a^2} &= ql, \\ C &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и краевое условие –

$$\sigma_y^0(l) = A_1 - \frac{B_1 l}{\sqrt{l^2 - a^2}} = q. \quad (3)$$

Решая совместно (2) и (3), получаем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -q \frac{a}{l-a}, \\ B_1 &= -q \sqrt{\frac{l+a}{l-a}}. \end{aligned} \right\}$$

Напряжения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^0(x) &= q \left[ \sqrt{\frac{l+a}{l-a}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{a}{l-a} \right], \\ \tau_{xy}^0(x) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Касательные напряжения на линии сопряжения отсутствуют, следовательно,  $\sigma_y^0$  – главное напряжение. Главное напряжение  $\sigma_x^0$  определим через максимальные касательных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y^0 - \sigma_x^0}{2} = \frac{q}{2}, \quad (q > 0), \quad \sigma_x^0 = \sigma_y^0 - q$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^0(x) &= q \left\{ \sqrt{\frac{l+a}{l-a}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{a}{l-a} \right\}, \\ \sigma_x^0(x) &= q \left\{ \sqrt{\frac{l+a}{l-a}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{a}{l-a} - 1 \right\}, \\ \tau_{xy}^0(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если устремить  $l$  к бесконечности, получим приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_y^0 &= \frac{q}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}, \\ \bar{\sigma}_x^0 &= q \frac{\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}, \\ \tau_{xz}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Аналогично будет, если вырез рассматривать как эллиптическое отверстие с полуосями  $a$  и  $b$ , радиус  $b$  которого стремится к нулю [2]. Определим отношение  $l/t$ , при котором отклонение напряжений, найденных по выражениям (4) и (5) не превышают заданной погрешности  $\Delta$ . Для этого достаточно сравнить  $\sigma_y^0$  и  $\bar{\sigma}_y^0$ , откуда

$$\frac{l}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{2\Delta - \Delta^2}}.$$

Например, при  $\Delta = 0,05$  -  $\frac{l}{t} \geq 3,2$ ; при  $\Delta = 0,03$  -  $\frac{l}{t} \geq 4,1$ .

Из формул (4) и (5) видно, что на концах плоского разреза напряжения стремятся к бесконечности, хотя на самом деле концы имеют радиус, который равен  $h$  (рис. 2).

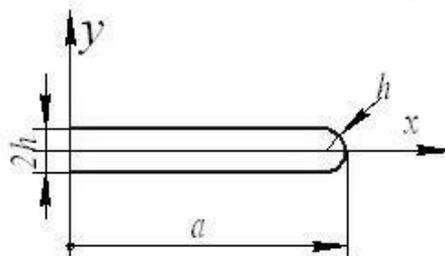


Рис. 2 Вырез с закругленными концами

Обозначим через  $\alpha_l$  теоретический коэффициент концентрации напряжений по нормальным напряжениям  $\bar{\sigma}_y^0$ , то есть

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\sigma}_{y \max}^0}{q} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{a}\right)^2}},$$

где  $a_1$  – половина длины разреза с идеально острыми концами.

Пусть напряжения  $\sigma_y^0(a)$  равны напряжениям на контуре эллиптического отверстия с большей полуосью  $2a$ , при  $y=0$ . Совмещая концы контуров выреза и эллиптического отверстия (рис. 3), можно определить параметр  $a_1$

$$a_1 = a \sqrt{1 - \left(\frac{h}{b}\right)^2},$$

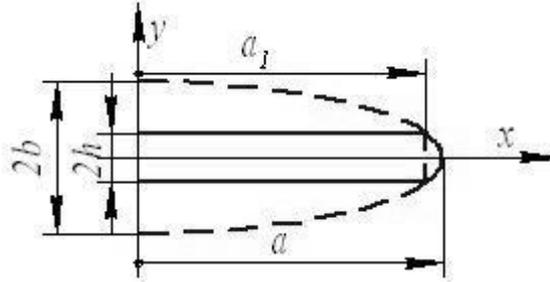


Рис. 3 Схема приведения выреза с закругленными концами к эллиптическому отверстию

$$\alpha_1 = \frac{b}{h}. \quad (6)$$

С другой стороны, согласно [2]

$$\alpha_1 = \frac{2a + b}{b}. \quad (7)$$

Приравняв (6) и (7), получим

$$b = \frac{h + \sqrt{h^2 + 8ah}}{2}, \quad a_1 = a \sqrt{1 - \left(\frac{2h}{h + \sqrt{h^2 + 8ah}}\right)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{h + \sqrt{h^2 + 8ah}}{2h}.$$

Итак, для случая ограниченного решения на концах разреза выражения (4) можно переписать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^0(x) &= q \left[ \frac{\sqrt{l+a}}{\sqrt{l-a}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{x}\right)^2}} - \frac{a}{l-a} \right], \\ \sigma_x^0(x) &= q \left[ \frac{\sqrt{l+a}}{\sqrt{l-a}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{x}\right)^2}} - \frac{a}{l-a} - 1 \right], \\ \tau_{xy}^0(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кроме радиусов закруглений концов плоского выреза, на коэффициент концентрации влияет текучесть. В этом случае следует считать

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_T}{q},$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести.

Доказывая решения (8) на рис. 4 показаны теоретические и экспериментальные эпюры напряжений  $\sigma_y^0$  в безразмерных величинах при  $a/h \approx 7$ ,  $a/l \approx 0,1$ . Эксперименты были проведены на модели из органического стекла при помощи лазерного интерферометра по методике, описанной в [3].

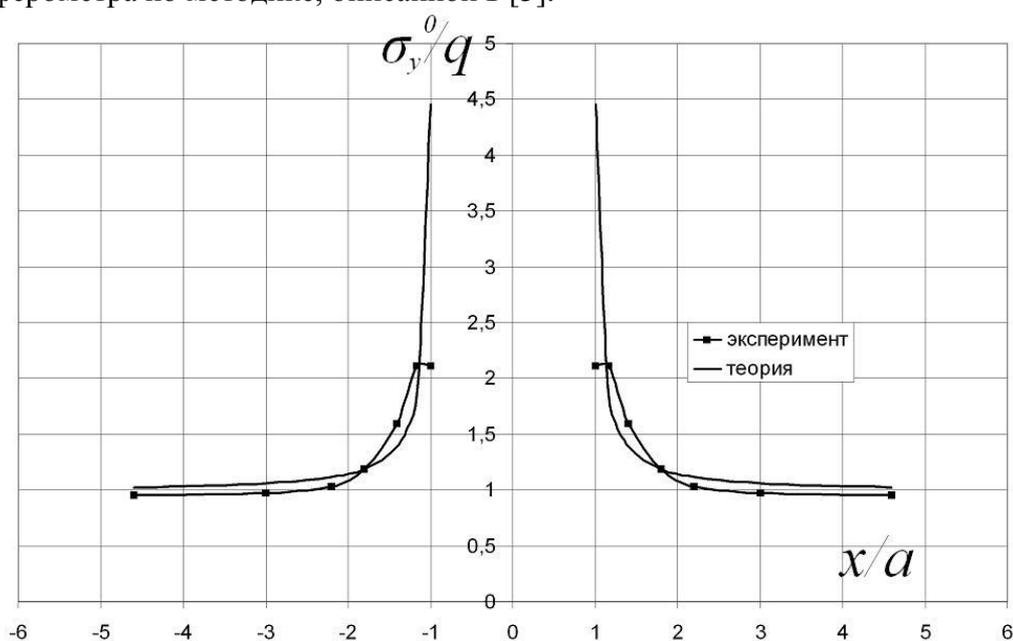


Рис. 4 Сравнение теории с экспериментом

Сравнительный анализа показал, что относительное отклонение теории от эксперимента не превышает 8% на участке  $1,16 \leq \left| \frac{x}{a} \right| \leq 4,6$ . У концов выреза  $\left( 1 \leq \left| \frac{x}{a} \right| \leq 1,16 \right)$  наблюдается существенное расхождение кривых из-за того, что в этой зоне материал пластичен, то есть эффективный (опытный) коэффициент концентрации напряжений в этой зоне должен быть равен

$$\alpha_y = \frac{\sigma_0}{q},$$

что также согласуется с теорией.

Таким образом, можно сделать вывод, что представленные аналитические решения (4) и (8) могут быть использовано для исследования концентрации напряжений возле технологических вырезов или дефектов различного рода в деталях машин.

#### Литература:

1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: «Наука», 1968. – 512 с.
2. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
3. Беркутов В.П., Гусева Н.В., Дородов П.В., Киселев М.М. Интерферометр для определения нормальных напряжений в плоских прозрачных моделях // Датчики и системы, – №2. – 2009. – С. 26-30.