

Определение ускорения центра масс тела

С.А. Алексеев, О.А. Бурцева, А.С. Алексеева, Н.Р. Абуладзе

*Южно-Российский государственный политехнический
университет имени М.И. Платова, г. Новочеркасск*

Аннотация: В процессе анализа движения (конструкции/модели/тела) приходится обрабатывать огромный объём данных в виде показаний акселерометров. В каждый момент времени необходимо решать задачу определения ускорения заданной точки тела, принятой за полюс. При этом одновременно решаются три задачи: первая - определение мгновенного углового ускорения тела; вторая – определение его мгновенной угловой скорости; третья - нахождение полного ускорения его центра масс. Данные параметры позволяют описать движение исследуемого тела. Целью данной статьи является сокращение времени на каждую итерацию по определению ускорений заданного полюса твёрдого тела.

Ключевые слова: твердое тело, центр масс, мгновенные угловые скорость и ускорение.

Введение

На основе информации о полных ускорениях трех произвольных точек абсолютно твердого тела, решается задача о нахождении мгновенных угловых скоростей и ускорений тела, а также определяется полное ускорение его центра масс, выбираемого в качестве полюса. Задача актуальна ввиду ее практического использования в машиностроении, строительстве и прочих производственных областях.

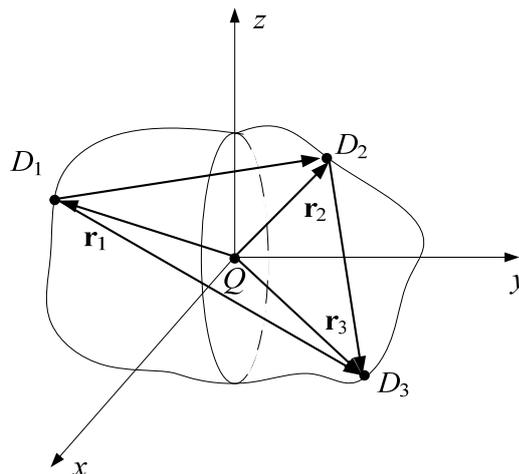


Рис. 1. - Расположение акселерометров и радиус-векторов расстояний до них

Имеется некоторое количество акселерометров, измеряющих вектор линейных ускорений в трех произвольных точках движущегося твердого

тела, см. рис. 1. Требуется определить мгновенную угловую скорость, мгновенное угловое ускорение и ускорение центра масс этого тела. Положение центра масс тела известно. Разобьем задачу на три этапа. Первый заключается в определении мгновенного углового ускорения тела. Второй – в определении его мгновенной угловой скорости. Третий - в нахождении полного ускорения его центра масс.

Определение углового ускорения тела

Введем неподвижную $x'y'z'$ и подвижную систему отсчета xyz . Неподвижная система отсчета обычно связана с Землей. Начало подвижной системы отсчета совпадает с мгновенным центром ускорений (МЦУ) - Q . Примем за полюс¹ точку D_2 [1], ускорение которой известно. Тогда ускорение точки D_3 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)) = \\ &= \mathbf{a}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + \boldsymbol{\omega}^* \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^*) - \boldsymbol{\omega}^2 \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

В выражении (1) использовано свойство двойного векторного произведения и введены следующие обозначения:

$\mathbf{a}_i = [a_{ix} \ a_{iy} \ a_{iz}]^*$, $i=2,3$ - линейные ускорения точек D_2 и D_3 ;

$\mathbf{r}_i = [r_{ix} \ r_{iy} \ r_{iz}]^*$, $i=2,3$ - радиус-векторы точек D_2 и D_3 от МЦУ;

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z]^*$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^*$ - мгновенное² угловое ускорение и мгновенная угловая скорость тела; * – знак транспонирования.

Поскольку ускорения точек D_2 и D_3 известны, то система уравнений (1) позволяет определить необходимые нам параметры. Домножим выражение (1) скалярно справа на вектор $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$, получим модуль мгновенной угловой скорости:

¹ Полюсом называют точку, относительно которой происходит вращение во вращательном движении.

² Мгновенное значение – в данный момент времени.

$$\omega^2 = -\frac{(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)^* \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2}. \quad (2)$$

Домножив выражение (1) векторно слева на $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$, получим модуль мгновенного углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2}. \quad (3)$$

При использовании формул (2) и (3) знать положения МЦУ не нужно, см. рис. 1. Пусть точка D_1 - начало отсчета подвижной системы координат. Тогда в силу разности радиус-векторов имеем:

$$\overline{D_1 D_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \overline{D_1 D_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \overline{D_1 D_3} - \overline{D_1 D_2} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2.$$

Нахождение угловой скорости тела

Начало подвижной системы отсчета выберем в одной из точек установки акселерометра. Запишем ускорения точек D_2 и D_3 , выбирая в качестве полюса точку D_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + \varepsilon \times \overline{D_1 D_2} + \omega \times (\omega \times \overline{D_1 D_2}) = \\ &= \mathbf{a}_1 + \varepsilon \times \overline{D_1 D_2} + \omega^* \cdot (\omega \cdot \overline{D_1 D_2}^*) - \omega^2 \cdot \overline{D_1 D_2}; \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_1 + \varepsilon \times \overline{D_1 D_3} + \omega \times (\omega \times \overline{D_1 D_3}) = \\ &= \mathbf{a}_1 + \varepsilon \times \overline{D_1 D_3} + \omega^* \cdot (\omega \cdot \overline{D_1 D_3}^*) - \omega^2 \cdot \overline{D_1 D_3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Векторные уравнения (4) в проекциях на оси подвижной системы координат дают шесть уравнений относительно шести неизвестных. Распишем их более подробно:

$$\begin{aligned} a_{2x} - a_{1x} &= \varepsilon_y(z_2 - z_1) - \varepsilon_z(y_2 - y_1) + \\ &+ \omega_x[\omega_x(x_2 - x_1) + \omega_y(y_2 - y_1) + \omega_z(z_2 - z_1)] - \omega^2(x_2 - x_1); \\ a_{2y} - a_{1y} &= \varepsilon_z(x_2 - x_1) - \varepsilon_x(z_2 - z_1) + \\ &+ \omega_y[\omega_x(x_2 - x_1) + \omega_y(y_2 - y_1) + \omega_z(z_2 - z_1)] - \omega^2(y_2 - y_1); \\ a_{2z} - a_{1z} &= \varepsilon_x(y_2 - y_1) - \varepsilon_y(x_2 - x_1) + \\ &+ \omega_z[\omega_x(x_2 - x_1) + \omega_y(y_2 - y_1) + \omega_z(z_2 - z_1)] - \omega^2(z_2 - z_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{3x} - a_{1x} &= \varepsilon_y(z_3 - z_1) - \varepsilon_z(y_3 - y_1) + \\
 &+ \omega_x[\omega_x(x_3 - x_1) + \omega_y(y_3 - y_1) + \omega_z(z_3 - z_1)] - \omega^2(x_3 - x_1); \\
 a_{3y} - a_{1y} &= \varepsilon_z(x_3 - x_1) - \varepsilon_x(z_3 - z_1) + \\
 &+ \omega_y[\omega_x(x_3 - x_1) + \omega_y(y_3 - y_1) + \omega_z(z_3 - z_1)] - \omega^2(y_3 - y_1); \\
 a_{3z} - a_{1z} &= \varepsilon_x(y_3 - y_1) - \varepsilon_y(x_3 - x_1) + \\
 &+ \omega_z[\omega_x(x_3 - x_1) + \omega_y(y_3 - y_1) + \omega_z(z_3 - z_1)] - \omega^2(z_3 - z_1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Система уравнений (5) в векторно-матричной форме имеет вид

$$\mathbf{S} = A^{-1}\mathbf{B}, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \omega_x^2 \\ \omega_x\omega_y \\ \omega_x\omega_z \\ \omega_y^2 \\ \omega_y\omega_z \\ \omega_z^2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & 0 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & 0 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{2x} - a_{1x} - \varepsilon_y(z_2 - z_1) + \varepsilon_z(y_2 - y_1) + \omega^2(x_2 - x_1) \\ a_{2y} - a_{1y} - \varepsilon_z(x_2 - x_1) + \varepsilon_x(z_2 - z_1) + \omega^2(y_2 - y_1) \\ a_{2z} - a_{1z} - \varepsilon_x(y_2 - y_1) + \varepsilon_y(x_2 - x_1) + \omega^2(z_2 - z_1) \\ a_{3x} - a_{1x} - \varepsilon_y(z_3 - z_1) + \varepsilon_z(y_3 - y_1) + \omega^2(x_3 - x_1) \\ a_{3y} - a_{1y} - \varepsilon_z(x_3 - x_1) + \varepsilon_x(z_3 - z_1) + \omega^2(y_3 - y_1) \\ a_{3z} - a_{1z} - \varepsilon_x(y_3 - y_1) + \varepsilon_y(x_3 - x_1) + \omega^2(z_3 - z_1) \end{bmatrix}.$$

В вычислительном отношении при решении системы уравнений (6) есть ряд «подводных камней». Например, значение ω_x^2 может получиться отрицательным. В этом случае для определения значений угловых скоростей лучше использовать уравнения:

$$\omega_x\omega_y = d_1, \quad \omega_x\omega_z = d_2, \quad \omega_y\omega_z = d_3,$$

где d_1, d_2, d_3 - полученные числовые значения.

Другая «неприятность» системы (6) это сингулярность матрицы A , что

не позволяет обратить ее [2]. В этом случае можно использовать метод сопряженных градиентов [3-8] или регуляризацию матрицы A [9]. Тем более, что матрица A подвергается обращению один раз для данного расположения акселерометров ввиду абсолютной твердости тела.

Итак, в результате решения системы уравнений (6), получаем значения угловых скоростей тела.

Определение ускорения центра масс тела

Поскольку положение центра масс тела известно, тогда выбрав в качестве полюса любую из точек установки акселерометров, получим:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{D_1 C} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{D_1 C}). \quad (7)$$

При известных значениях мгновенной угловой скорости и мгновенного углового ускорения, вычисление выражения (7) не представляет никаких трудностей.

Авторы статьи решали поставленную задачу независимо друг от друга. Поэтому далее представлен другой алгоритм ее решения. Предложенный ниже алгоритм лишен указанных недостатков.

Альтернативный алгоритм решения задачи

Пусть в каждый момент времени известны линейные суммарные ускорения a_i в i -тых точках твердого тела [9]:

$$a_1 = a_{1x}\mathbf{i} + a_{1y}\mathbf{j} + a_{1z}\mathbf{k};$$

$$a_2 = a_{2x}\mathbf{i} + a_{2y}\mathbf{j} + a_{2z}\mathbf{k};$$

$$a_3 = a_{3x}\mathbf{i} + a_{3y}\mathbf{j} + a_{3z}\mathbf{k}.$$

Необходимо определить вектор мгновенных угловых $\boldsymbol{\varepsilon}$ ускорений и скоростей $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела, а также ускорение центра его масс \mathbf{a}_C .

Проекции ускорений i -той точки по оси декартовой системы координат имеют вид [10]:

$$a_{ix} = a_x + \varepsilon_y z_i - \varepsilon_z y_i + \omega_y v_{iz} - \omega_z v_{iy};$$

$$a_{iy} = a_y + \varepsilon_z x_i - \varepsilon_x z_i + \omega_z v_{ix} - \omega_x v_{iz};$$

$$a_{iz} = a_z + \varepsilon_x y_i - \varepsilon_y x_i + \omega_x v_{iy} - \omega_y v_{ix}.$$

Учитывая, что:

$$\begin{aligned}v_{ix} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i; & v_{iy} &= \omega_z z_i - \omega_x y_i; \\v_{iz} &= \omega_x z_i - \omega_y y_i.\end{aligned}$$

Для определения 6 компонент ускорений и 3 компонент угловой скорости определенной точки твердого тела достаточно показаний акселерометров с трех точек ($i = 1, 2, 3$), таким образом, получим систему (8) из 9 нелинейных уравнений относительно 9 неизвестных:

$$\begin{aligned}a_{ix} &= a_x - x_i(\omega_y^2 + \omega_z^2) - y_i(\varepsilon_z - \omega_x \omega_y) + z_i(\varepsilon_y + \omega_x \omega_z); \\a_{iz} &= a_z - x_i(\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + y_i(\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - z_i(\omega_x^2 + \omega_y^2); \\a_{iy} &= a_y + x_i(\varepsilon_z - \omega_x \omega_y) - y_i(\omega_x^2 + \omega_z^2) - z_i(\varepsilon_x - \omega_y \omega_z)\end{aligned} \quad (8)$$

Решение нелинейной системы (8) вызывает определенные трудности [11-13] и требует существенных затрат машинного времени. Для линеаризации решения сделаем замену переменных (9):

$$\begin{aligned}W_x &= \omega_x^2; & W_y &= \omega_y^2; & W_z &= \omega_z^2; \\W_{xy} &= \omega_x \omega_y; & W_{xz} &= \omega_x \omega_z; & W_{yz} &= \omega_y \omega_z.\end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{ix} &= a_x - x_i(W_y + W_z) - y_i(\varepsilon_z - W_{xy}) + z_i(\varepsilon_y + W_{xz}); \\a_{iy} &= a_y + x_i(\varepsilon_z - W_{xy}) - y_i(W_x + W_z) - z_i(\varepsilon_x - W_{yz}); \\a_{iz} &= a_z - x_i(\varepsilon_y - W_{xz}) + y_i(\varepsilon_x + W_{yz}) - z_i(W_x + W_y).\end{aligned} \quad (10)$$

Для трех точек твердого тела получим систему 9 уравнений с 12 неизвестными. Недостающие 3 уравнения получим, разместив 4-ый акселерометр в любой другой точке твердого тела и сняв показания с него. В итоге получим систему из 12-ти линейных уравнений, решив которую определим вектор неизвестных:

$$X = \{a_x; a_y; a_z; \varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; W_{xy}; W_{yz}; W_{xz}; W_x; W_y; W_z\}^*.$$

Фактические значения угловых скоростей ω и ускорений ε получим из выражений замены переменных (9).

В матричном виде систем уравнений из 12-ти линейных уравнений выглядит следующим образом:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

\mathbf{M} - матрица коэффициентов перед неизвестными, определитель которой не равен нулю;

$\mathbf{C} = \{a_{1x}; a_{1y}; a_{1z}; a_{2x}; a_{2y}; a_{2z}; \dots; a_{4x}; a_{4y}; a_{4z}\}^*$ - вектор линейных ускорений четырех точек твердого тела, полученные из показаний акселерометров.

Заключение

Для решения поставленной задачи использованы два различных подхода. Оба метода привели к одинаковым результатам при решении тестовых задач. Таким образом, удалось значительно сократить расчётное время каждой итерации по определению ускорений заданной точки твёрдого тела путём линеаризации разрешающей системы уравнений.

Литература

1. Голубев Ю.Ф., Основы теоретической механики. – М.: Изд-во МГУ, 2000. – 719 с.
2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
3. Акулич И. Л., Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
4. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М., Практическая оптимизация. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. – 509 с.
5. Коршунов Ю. М., Коршунов Ю. М., Математические основы кибернетики. - М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
6. Максимов Ю. А., Филипповская Е. А., Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. – М.: МИФИ, 1982. - 52 с.
7. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 832 с.
8. Henk A. van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear System. – Cambridge University Press, 2003. – 221 p.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

10. Лачуга Ю.Ф., Теоретическая механика. – М.: Изд-во КолосС, 2004. – 575 с.

11. Herbert S. Wilf. Algorithms and Complexity. A.K. Peters, second edition, 2002. – 135 p.

12. Косенко, Е.Е., Бурцева, О.А., Нефедов, В.В., Косенко, В.В., Черпаков, А.В. Моделирование напряженного состояния арматурных стержней, применяемых при производстве преднапряженных железобетонных конструкций // Инженерный вестник Дона, 2011, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/549.

13. Косенко Е.Е., Косенко В.В., Черпаков А.В. Исследование колебаний полнотелой стержневой модели кантилевера с дефектом // Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2153.

References

1. Golubev Ju.F. Osnovy teoreticheskoy mehaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]. M.: Izd-vo MGU, 2000. 719 p.

2. Gantmaher F.R. Teorija matric [Matrix Theory]. M.: Fizmatlit, 2010. 560 p.

3. Akulich I. L. Matematicheskoe programmirovaniye v primerah i zadachah [Mathematical Programming in Examples and Tasks]. M.: Vyssh. shk., 1986. 319 p.

4. Gill F., Mjurrej U., Rajt M. Prakticheskaja optimizacija [Practical optimization]. Per. s angl. M.: Mir, 1985. 509 p.

5. Korshunov Ju. M., Korshunov Ju. M. Matematicheskie osnovy kibernetiki [Mathematical Foundations of Cybernetics]. M.: Jenergoatomizdat, 1987. 496 p.

6. Maksimov Ju. A., Fillipovskaja E. A. Algoritmy reshenija zadach nelinejnogo programmirovaniya [Algorithms for solving nonlinear programming problems]. M.: MIFI, 1982. 52 p.

7. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [A Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers]. M.: Nauka, 1970. 832 p.

8. Henk A. van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear System. Cambridge University Press, 2003. 221 p.



9. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y., *Metodyi resheniya nekorrektnyih zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. M.: Nauka, 1986. 288 с.
10. Lachuga Yu.F., *Teoreticheskaya mehanika* [Theoretical mechanics]. M.: Izd-vo KolosS, 2004. 575p.
11. Herbert S. Wilf. *Algorithms and Complexity*. A.K. Peters, second edition, 2002. 135 p.
12. Kosenko, E.E., Burceva, O.A., Nefedov, V.V., Kosenko, V.V., Cherpakov, A.V. *Inzhenernyj vestnik Dona* (Rus), 2011, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2011/549.
13. Kosenko E.E., Kosenko V.V., Cherpakov A.V. *Inzhenernyj vestnik Dona* (Rus), 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2153.