

## Численное исследование процесса теплопереноса в плоской стенке с внутренними источниками теплоты при граничных условиях первого рода

*С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин*

*ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара*

**Аннотация:** В настоящей работе проводится исследование процесса теплопроводности в плоской стенке с внутренним источником теплоты при граничных условиях первого рода. Для решения задач теплообмена применяются различные численные и аналитические методы. Каждый метод обладает рядом преимуществ и недостатков. В работе предлагается использовать численный метод конечных разностей. Исходное дифференциальное уравнение, а также краевые условия аппроксимируются с использованием конечно-разностной схемы. Суть метода заключается в нанесении на расчётную область пространственно-временной сетки. Для каждого узла сетки записывается разностное соотношение (исходное дифференциальное уравнение с краевыми условиями заменяется соответствующими выражениями, полученными при использовании разностной схемы). Решая данную схему, получаем значения температуры в пластине для каждого шага по времени и координате. На основе полученного решения построены графические зависимости температуры от времени и координаты, а также проведен их анализ.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, теплопроводность, пластина, внутренний источник теплоты, граничные условия первого рода.

**Введение.** Исследование процесса теплопроводности в телах различной геометрической формы является важной задачей математической физики. При моделировании процессов теплообмена возможно применение точных аналитических, численных и приближенных аналитических методов. Так, например, в работе Тришевского О.И. и др. [1] установлено, что для численного решения теплофизических задач теплообмена, описываемых уравнениями нестационарной теплопроводности, наиболее эффективным является метод конечных разностей. Авторами для численного решения задачи нестационарной теплопроводности для полосы и валок при горячей прокатке было осуществлено разделение исследуемой области условной сеткой. В дальнейшем, для полученных узлов сетки были составлены уравнения баланса энергии с последующей конечно-разностной аппроксимацией Фурье.

---

В работе [2] авторами был изучен процесс теплопроводности для однослойных двумерных материалов при наличии теплового потока в материале и нагреве за счет электрического тока. Проведен сравнительный анализ полученного аналитического решения приближенных уравнений с численными результатами, полученными методом конечных элементов при решении двумерного уравнения. Кроме того, в работах [3-5] авторами для исследования процесса теплопроводности применен метод конечных разностей, реализованный в программе Mathcad. Результаты численного решения представлены на графиках, показывающих изменения температуры как по времени, так и по координате.

Narish S в своей работе [6] дал краткое описание исследования численных методологий, применяемых в задачах течения жидкости и тепломассопереноса в машиностроении. Данные методологии включают в себя метод конечных разностей, метод конечных элементов, методы решетки Больцмана, методы схемы Крэнка-Николсона, интегральный метод, метод Рунге-Кутты, метод рядов Тейлора и т.д. Автором представлены численные методы, применяемые к различным фундаментальным задачам математического моделирования теплопередачи. При этом, характеристика исследуемых режимов различается в зависимости от применяемых методов. Статья Narish S посвящена демонстрации преимуществ методов, применяемых для решения реальных задач теплообмена в инженерных приложениях. Полученные результаты исследования, такие, как теплопроводность, тепловой поток, энтропия, температура и т. д., сравнивались с результатами, полученными при помощи различных численных методов.

В настоящее время метод конечных разностей представляет интерес для многих исследователей, так, в работе [7] авторы впервые используют обобщенный метод конечных разностей (GFDM), представляющий собой

---

недавно разработанный бессеточный метод коллокаций, применяемый для численного решения трехмерных пьезоэлектрических задач. В настоящем методе вся вычислительная область делится на набор перекрывающихся подобластей, в которых для построения локальных систем линейных уравнений применяется локальное разложение в ряд Тейлора и аппроксимация методом наименьших квадратов. Следуя механическим и электрическим уравнениям, можно установить разреженную и полосчатую матрицу жесткости, что делает метод очень привлекательным для крупномасштабного инженерного моделирования. Авторами представлены предварительные численные эксперименты для демонстрации применимости и точности настоящего метода, где полученные результаты сравниваются с аналитическими решениями с наименьшей погрешностью.

**Математическая постановка задачи.** В настоящей работе рассматривается решение задачи нестационарной теплопроводности в неограниченной пластине (плоской стенке).

На рис.1 представлена схема теплообмена в плоской стенке с внутренними источниками теплоты при граничных условиях первого рода.

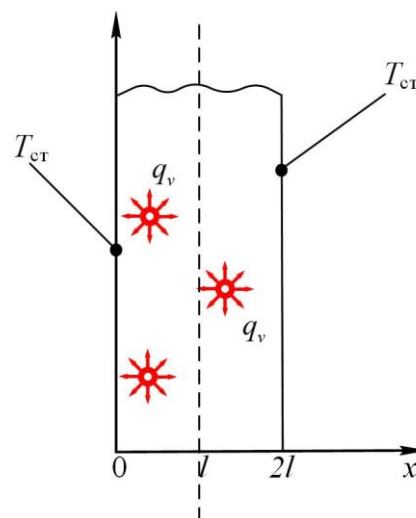


Рис. 1. – Схема теплообмена

Согласно принятой схеме теплообмена, краевая задача будет иметь вид [8]:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (t > 0; 0 < x < l), \quad (1)$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$T(0,t) = T_{cr}, \quad (4)$$

где  $T$  – температура;  $x$  – координата;  $t$  – время;  $T_{cr}$  – температура стенки;  $T_0$  – начальная температура;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $l$  – длина пластины;  $c$  – теплоемкость пластины;  $\rho$  – плотность материала пластины;  $q_v$  – мощность внутреннего источника теплоты,  $q_v = q_0 t$ .

Введем безразмерные параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cr} - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad Fo = \frac{at}{l^2}; \quad Po = \frac{q_0 l^2}{\lambda(T_{cr} - T_0)}. \quad (5)$$

Тогда задача (1) – (4) примет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po Fo \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (6)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0. \quad (9)$$

**Численное решение задачи.** Решение задачи (6) – (9) отыскивается с использованием метода конечных разностей [9,10]. Согласно этому методу вводится пространственно – временная сетка с шагами по пространственной координате  $\Delta \xi$  и по времени  $\Delta Fo$ . При этом:

$$\xi_i = i \Delta \xi, \quad i = \overline{0, I}; \quad Fo_k = k \Delta Fo, \quad k = \overline{0, K}, \quad (10)$$

где  $I, K$  – число шагов по координатам  $\xi, Fo$ .

На сетке (10) вводятся сеточные функции  $\Theta_i^k = \Theta(\xi_i, Fo_k)$ . С применением явной схемы аппроксимации дифференциальных операторов, задача (6) – (9) примет следующий вид:

$$\frac{\Theta_i^{k+1} - \Theta_i^k}{\Delta Fo} = \frac{\Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k + \Theta_{i+1}^k}{\Delta \xi^2} + PoFo_k ; \quad (11)$$

$$\Theta_0^k = 1 ; \quad (12)$$

$$\frac{\Theta_l^k - \Theta_{l-1}^k}{\Delta \xi} = 0 ; \quad (13)$$

$$\Theta_i^0 = 0 . \quad (14)$$

**Обсуждение результатов.** На рис.2 представлены результаты решения (11) – (14). С ростом времени, мощность источника теплоты увеличивается по линейному закону. Показано, что при этом отмечается неограниченный рост температуры. Так, например, в точке  $\xi = 0,1$  значение безразмерной температуры при  $Fo = 0,01$   $\Theta(0,1;0,01) = 0,474$ .

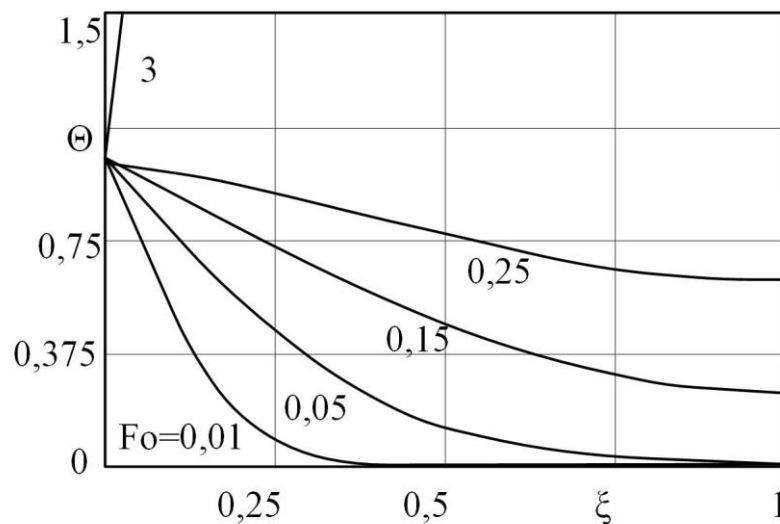


Рис. 2. – Распределение температуры по толщине пластины при  $Po = 10$

На рис.3 представлено изменение безразмерной температуры  $\Theta$  во времени при значениях критерия Померанцева  $Po = 10$ . В зависимости от удаления от поверхности пластины, характер нагрева существенно отличается. Так, рост температуры на поверхности сдерживается

граничными условиями первого рода. Например, при значениях  $\xi = 0,1$  наблюдается резкий рост температуры на начальном этапе нагрева, а далее температура увеличивается по линейному закону, причем интенсивность нагрева (угол наклона температурной кривой) возрастает при удалении от поверхности.

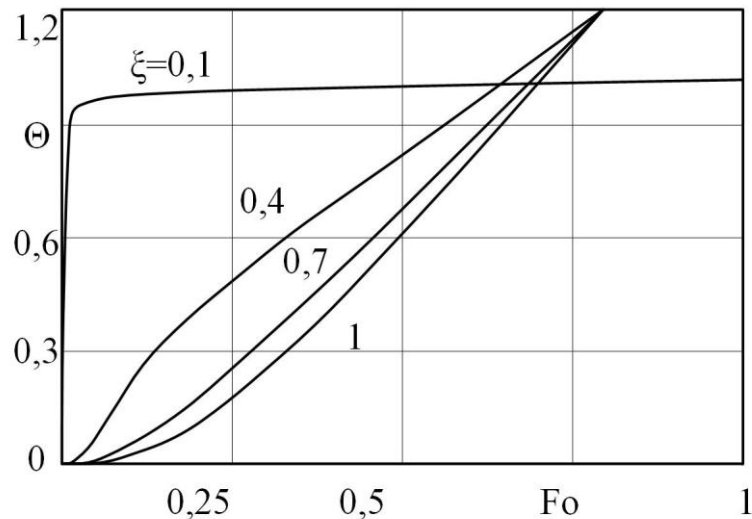


Рис. 3. – Распределение температуры во времени при  $Ro = 10$

**Численная верификация результатов.** На рис.4 представлена зависимость погрешности вычисления от величины шага по времени  $\Delta Fo$ . Из анализа рис.4 можно сделать выводы, что при значении временного шага  $\Delta Fo < 0,01$  погрешность вычисления безразмерной температуры  $\Theta$  не превышает 1%. Последующее уменьшение шага  $\Delta Fo$  при изучении нестационарной теплопроводности в плоской стенке при заданных значениях пространственно – временной области нецелесообразно.

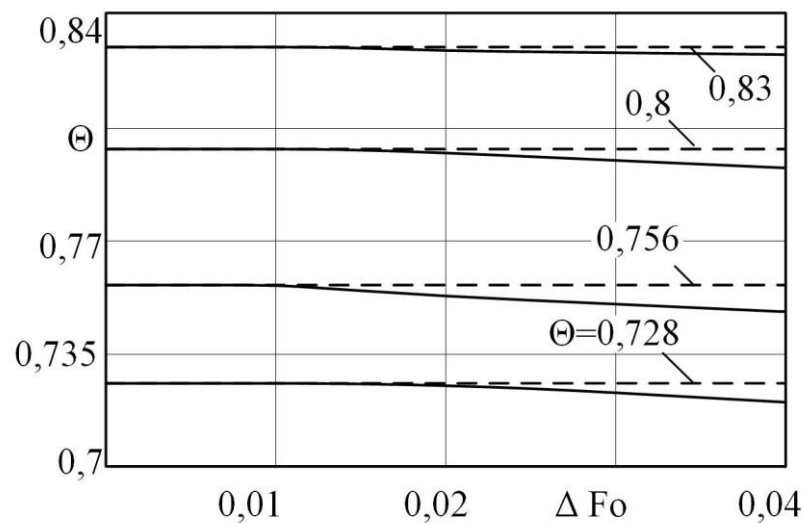


Рис. 4. – Влияние time step на погрешность вычислений

### Благодарность

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00047, <https://rscf.ru/project/21-79-00047/>

### Литература

1. Тришевский О. И., Салтавец Н. В. Использование метода явных конечных разностей для решения задач теплообмена при горячей прокатке // Сталь. - 2017. - №3. с.33-36.
2. Ward O.M.G., McCann E. The heat equation for nanoconstrictions in 2D materials with Joule self-heating // Journal of Physics D: Applied Physics. - 2021. - Vol. 54, № 47, Article number 475303.
3. Попов А.И., Зинина С.А., Брагин Д.А., Еремин А.В. Локально-неравновесная модель теплопроводности в стержне // Theoretical & Applied Science. – 2021. – №. 8. – С. 301-304.
4. Еремин А. В. Исследование процесса охлаждения многослойной пластины при несимметричных граничных условиях третьего рода // Молодежный научный вестник. – 2016. – №. 10. – С. 68-73.

5. Зинина С.А., Попов А.И., Шульга А.С. Исследование процесса конвективного нагрева пластины с переменной температурой греющей среды // Проблемы научной мысли. – 2021. – Volume 3, №1. – С. 28-33
6. Harish S. et al. A Study on Numerical Methodologies in Solving Fluid Flow and Heat Transfer Problems //IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – IOP Publishing, 2021. – Т. 850. – №. 1. – С. 012021.
7. Xia H., Gu Y. Generalized finite difference method for electroelastic analysis of three-dimensional piezoelectric structures //Applied Mathematics Letters. – 2021. – Т. 117. – С. 107084.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. Школа, 1967. – 600 с.
9. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
10. Гадиева С. С., Гахраманов П. Ф. Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений тепломассопереноса //Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. – 2017. – Т. 32. – №. 4. – С. 38-46.

### References

1. Trishevskij O. I., Saltavec N. V. Stal'. 2017. №3. P.33-36.
  2. Ward O.M.G., McCann E. Journal of Physics D: Applied Physics. 2021. Vol. 54, № 47, Article number 475303.
  3. Popov A.I., Zinina S.A., Bragin D.A., Eremin A.V. Theoretical & Applied Science. 2021. №. 8. pp. 301-304.
  4. Eremin A. V. Molodezhnyj nauchnyj vestnik. 2016. №. 10. pp. 68-73.
  5. Zinina S.A., Popov A.I., SHul'ga A.S. Problemy nauchnoj mysli. 2021. Volume 3, №1. pp. 28-33.
  6. Harish S. et al. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. IOP Publishing, 2021. Т. 850. №. 1. pp. 012021.
  7. Xia H., Gu Y. Applied Mathematics Letters. 2021. Т. 117. p. 107084.
-





8. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of thermal conductivity]. M.: Vyssh. SHkola, 1967. 600 p.

9. Amosov A.A., Dubinskij YU.A., Kopchenova N.V. Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov: Ucheb. posobie. [Computational methods for engineers]. M.: Vyssh. shk, 1994. P. 544.

10. Gadieva S. S., Gahramanov P. F. Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki. 2017. T. 32. №. 4. pp. 38-46.