

## К расчету армированных изгибаемых элементов строительных конструкций из полимерных композиционных материалов с разномодульной нелинейно упругой матрицей

*Г.Б. Вержбовский*

*Донской государственный технический университет*

**Аннотация:** Описана инженерная методика определения несущей способности армированных изгибаемых элементов строительных конструкций, выполненных из бинарного композиционного материала с разномодульной, нелинейно упругой матрицей и порошковым наполнителем.

**Ключевые слова:** композиты, матрица, наполнитель, нелинейно упругий материал, арматура, итерационный процесс, компьютерная программа, балка, двутавр, геометрические характеристики.

Современные инновационные строительные материалы имеют искусственное происхождение и достаточно сложный состав, что позволяет отнести их к классу композитов. Рассмотрим композит с полимерной матрицей и порошковым наполнителем (ПКМ). Области применения ПКМ различны – от космической и авиационной техники до бытовых изделий. В строительстве полимерные композиты уже давно применяются для изготовления террасных досок или декинга. Несколько лет назад ПКМ за рубежом начали применять в качестве элементов несущих строительных конструкций [1]. Аналогичные разработки осуществляются и в России.

Несущие конструкции каркаса здания под воздействием эксплуатационных нагрузок деформируются, что в случае полимерной матрицы может привести к серьезным проблемам из-за ползучести полимера. Сложное напряженное состояние конструкций определяет необходимость создания инженерных методик их расчета и проектирования, учитывающих все особенности композитного материала.

Рассмотрим стержневой элемент строительной конструкции, выполненный из двухкомпонентного композита с полипропиленовой

матрицей и порошковым наполнителем с учетом следующих основных допущений:

- на границе матрицы и зерен наполнителя характеристики ПКМ не хуже параметров каждой составляющей материала;

- полипропиленовая матрица, согласно [2], имеет различные модули упругости в сжатой и растянутой зонах и при этом зависимость между деформациями и напряжениями нелинейна в сжатой зоне;

- порошковый наполнитель не является наноразмерным и состоит из изотропных частиц;

- полипропиленовая матрица также является изотропным материалом;

- композит и его отдельные части подчиняются закону Гука до разрушения;

- элемент строительной конструкции может изготавливаться как с армированием растянутой зоны, так и без него.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение элемента строительной конструкции, показанное на рисунке 1. На нём модули упругости ПКМ при растяжении и сжатии, а также модуль упругости арматуры обозначены как  $E_t$ ,  $E_p$  и  $E_a$  соответственно. С учетом положений [3] будем считать, что  $E_t = const$  при величине напряжений, не превосходящей длительную прочность материала, а изменение  $E_p$  можно описать кубическим полиномом.

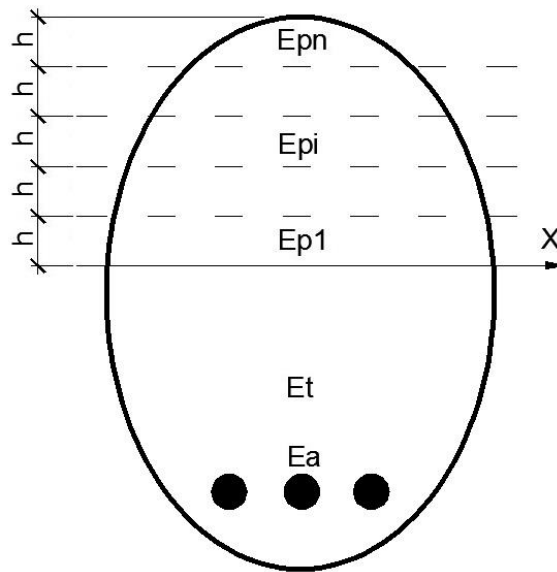


Рис. 1. – Поперечное сечение элемента

На рисунке 1 сжатая зона условно расположена выше нейтральной оси  $X$  элемента. Для инженерных расчетов при этом достаточно разделить сжатую зону поперечного сечения элемента на  $n$  равных по высоте участков, принимая для каждого из них постоянное значение модуля упругости  $E_{pi}$ . Величины напряжений, возникающих от действующих на элемент нагрузок, в общем случае различны для каждого участка и могут быть определены на уровне верхних границ участков. Несложно заметить, что при  $n \rightarrow \infty$  возможно получение точного решения. В рамках же инженерной методики достаточно разбить сжатую зону на конечное число участков, конкретное количество которых устанавливается в результате выполнения численного эксперимента.

Полимерные композитные материалы имеют разный состав, отличающийся друг от друга в том числе и модулями упругости. Таким образом, до решения вопроса о несущей способности элемента строительной конструкции необходимо определить характеристики композита в целом. Известны различные подходы к определению этих характеристик. Теория Фойхта предполагает, что все части ПКМ испытывают одинаковые

деформации [3]. Подход Рейсса предполагает наличие одинаковых напряжений [4]. Интервальную оценку значений, получаемых по двум указанным теориям, позволяет сузить методика Хашина-Штрикмана. Существуют и другие подходы к определению характеристик композитных материалов, например, работы [5, 6], где приводятся авторские методики отыскания характеристик ПКМ, или исследования [7 - 9], в которых описываются различные способы нахождения искомых параметров.

Интегральная методика определения характеристик ПКМ предложена в [10]. В указанной работе модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  полимерного композита предлагается определять при помощи выражений (1) через объемные модули деформации и модули сдвига материала, описываемые равенствами (2) и (3):

$$E_{\Sigma} = \frac{9K_{\Sigma}G_{\Sigma}}{3K_{\Sigma} + G_{\Sigma}}, \quad \nu_{\Sigma} = \frac{3K_{\Sigma} - 2G_{\Sigma}}{2(3K_{\Sigma} + G_{\Sigma})}. \quad (1)$$

$$K_{\Sigma} = (K_1K_2)^{1/2} \cdot \frac{m_1K_1^{1/2} + m_2K_2^{1/2}s^{1/2}}{m_1K_2^{1/2} + m_2K_1^{1/2}s^{1/2}}, \quad (2)$$

$$G_{\Sigma} = (G_1G_2)^{1/2} \cdot \frac{m_1G_1^{1/2} + m_2G_2^{1/2}s^{1/2}}{m_1G_2^{1/2} + m_2G_1^{1/2}s^{1/2}}, \quad (3)$$

где индексы  $\Sigma$ , 1 и 2 относятся к композиту в целом, матрице и наполнителю соответственно,

$m_i$  – объемные доли составляющих, причем  $m_1 + m_2 = 1$ ,

$K_i$  – объемные модули деформации,

$G_i$  – модули сдвига, а

$s = E_1/E_2$ .

В таблице 1 приведены экспериментальные значения модулей объемной деформации ПКМ различного состава, те же величины, найденные по (2), а также по методике, описанной в [11].

Таблица 1

Значения модулей объемной деформации (МПа)  
композиционных материалов с полипропиленовой матрицей

| Наполнитель        | $K_{\Sigma}$<br>эксп. | $s$  | $K_{\Sigma}$<br>по (2) | %    | $K_{\Sigma}$<br>по [13] | %    |
|--------------------|-----------------------|------|------------------------|------|-------------------------|------|
| 30% древесной муки | 3262                  | 0,14 | 3386                   | 3,8  | 4012                    | 23,0 |
| 40% древесной муки | 3873                  |      | 3613                   | 6,7  | 4448                    | 14,9 |
| 50% древесной муки | 4281                  |      | 3898                   | 8,9  | 4930                    | 15,2 |
| 60% древесной муки | 4689                  |      | 4267                   | 9,0  | 5463                    | 16,5 |
| 70% древесной муки | 5199                  |      | 4762                   | 8,4  | 6058                    | 16,5 |
| 80% древесной муки | 5668                  |      | 5460                   | 3,7  | 6724                    | 18,6 |
| 30% мела           | 2900                  | 0,16 | 3354                   | 15,6 | 3883                    | 33,9 |
| 40% мела           | 3900                  |      | 3562                   | 8,7  | 4263                    | 9,3  |
| 30% талька         | 3200                  | 0,4  | 3386                   | 5,8  | 3595                    | 12,3 |
| 40% талька         | 3300                  |      | 3587                   | 8,7  | 3851                    | 16,7 |

Погрешность в определении модулей объемной деформации по (2) оказывается незначительной, что подтверждает корректность предлагаемых зависимостей (1)-(3).

Стержневые элементы строительных конструкций из ПКМ производятся методом экструзии, позволяющим получать бесчисленное множество разнообразных поперечных сечений. Таким образом, аналитические выражения для определения геометрических характеристик таких элементов можно записать только в предельно общем виде, что не целесообразно для инженерной методики. В качестве примера рассмотрим армированный элемент прямоугольного поперечного сечения размерами  $B \times H$ , показанный на рисунке 2.

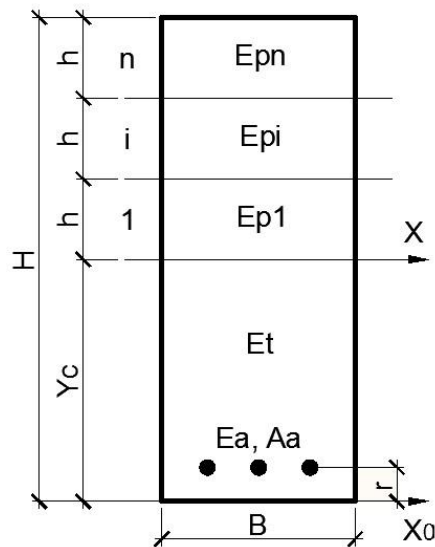


Рис. 2. – Элемент прямоугольного поперечного сечения

Запишем для него выражения, определяющие положение нейтральной плоскости и величину центрального осевого момента инерции, приведенного к  $E_{pn}$  – (4) и (5) соответственно:

$$Y_c = \frac{H}{2n} \cdot \frac{n^2 k^2 E_t + 2n^2 \mu z (E_a - E_t) + (1-k) \sum_{i=1}^n E_{pi} [2nk + (1-k)(2i-1)]}{nk E_t + n\mu (E_a - E_t) + (1-k) \sum_{i=1}^n E_{pi}}, \quad (4)$$

$$E_{pn} I_x = \frac{BH^3}{3} \cdot \left\{ k^3 E_t + 3\mu (k-z)^2 (E_a - E_t) + \frac{(1-k)^3}{n^3} \sum_{i=1}^n [3i(i-1)+1] E_{pi} \right\}. \quad (5)$$

В этих выражениях для сокращения письма использованы следующие обозначения

$$Y_c = kH, \quad h = \frac{1-k}{n} H, \quad A_a = \mu BH, \quad r = zH,$$

а остальные обозначения описаны выше и соответствуют рисунку 2.

Из (4) и (5) могут быть получены известные частные решения.

Для иных типов поперечных сечений элементов расчетные формулы могут оказаться весьма громоздкими, поэтому целесообразно перейти к численному решению задачи. При этом сначала необходимо назначить

исходное положение нейтральной плоскости и установить количество участков, на которые будет разбита сжатая зона поперечного сечения. Далее для каждого из участков сжатой зоны устанавливается величина максимальных напряжений в нем и соответствующие значения модулей упругости полипропиленовой матрицы. На следующем шаге при помощи выражений (1) устанавливаются характеристики ПКМ в целом, производится уточнение положения нейтральной плоскости и вычисляются приведенные геометрические характеристики. Итерационный процесс всегда сходится, поэтому перечисленные выше шаги повторяются до достижения требуемой точности решения.

Описанный алгоритм был реализован в компьютерной программе, с помощью которой производился расчет нескольких типов поперечных сечений элементов. Первым был показанный на рисунке 3 элемент универсального набора изделий для легкокаркасного домостроения, на который получен патент на полезную модель.

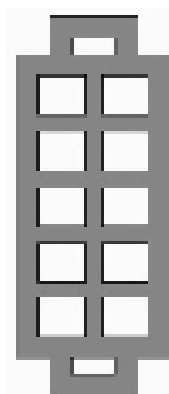


Рис. 3. – Элемент универсального набора

Численный эксперимент состоял из двух отдельных этапов. На первом из них ставилась задача определения минимально необходимого количества участков разбиения сжатой зоны поперечного сечения для получения приемлемой инженерной точности. На рисунке 4 показан график

---

зависимости положения центра тяжести сечения от числа разбиений сжатой зоны.

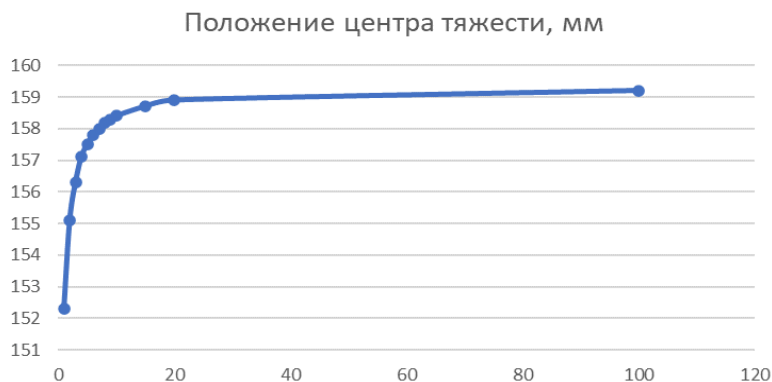


Рис. 4. – Зависимость положения центра тяжести сечения от числа итераций

График доказывает, что приемлемая для инженерных расчётов точность может быть получена уже при 7 разбиениях.

Следующим этапом эксперимента была оценка влияния армирования на жесткость показанного на рисунке 3 изгибаемого элемента из ПКМ с полипропиленовой матрицей и наполнителем из древесной муки. При этом предполагалось использование композитной арматуры периодического профиля. Такую арматуру можно вводить в расплавленный материал в процессе формирования поперечного сечения элемента при его экструзионном производстве. Расчеты показали, что жесткость изделия увеличивается незначительно. Прибавка составила всего 0,6%.

Еще одним таким же образом исследованным элементом стала балка двутаврового поперечного сечения, показанная на рисунке 5.

Первый этап эксперимента также показал, что семи итераций достаточно для получения приемлемой точности вычислений, а жесткость балки удалось увеличить в полтора раза за счет трехпроцентного армирования.





Рис. 5. – Армированная балка перекрытия

Результаты численных экспериментов над двумя типами изгибаемых элементов, выполненных из полимерных композитных материалов, доказали необходимость учета особенностей нелинейного поведения сжатой полипропиленовой матрицы для корректной оценки прочностных и жесткостных свойств элементов. Предложенная инженерная методика является универсальной и может быть распространена на расчеты других аналогичных изделий.

### Литература

1. Liukko, Tuukka. Wood Plastic Composites in Europe: An Introduction to Wood Plastic Composite Markets and Products // BALTIC FORESTRY. - 2007. - Vol. 13. - № 1 (24). - P. 131-136.
2. Пилиповский П.И., Ярцев И.К. Полипропилен. Л: Химия, 1967, 316 с.
3. Voigt V. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928. – 962 s.
4. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung. // Z. Agnew. Math. Und Mech. - 1929. V. 9, - № 1. - P. 49-58.

5. Курин С.В. Прогнозирование модуля упругости полимерных композиционных материалов для изделий машиностроения: диссертация ... кандидата технических наук - Набережные Челны, 2011. - 150 с.
6. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1639](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1639).
7. Kaw Autar K. Mechanics of Composite Materials. London-NewYork: Taylor & Francis Group, 2006. - 473 p.
8. Ochsner Andreas, Lucas F.M. Silva, Holm Altenbach. Mechanics and Properties of Composed Materials and Structures. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, - 2012. - 195 p.
9. Логинов В.Т., Дерлугян П.Д. Химическое конструирование трибокомпозитов и их производство в ОКТБ «Орион» // Инженерный вестник Дона, 2007, №1 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2007/46](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2007/46).
10. Вержбовский Г. Б. Прогнозирование характеристик композитных материалов на основе свойств составляющих их частей // Науковедение. - 2014. - №7. - С. 909-914.
11. Петроченков Р.Г. Композиты на минеральных заполнителях. т. 2 - М.: Изд-во московского государственного горного университета, 2005. - 351 с.

### References

1. Liukko, Tuukka. BALTIC FORESTRY. 2007. Vol. 13. № 1 (24). pp. 131-136.
  2. Pilipovskij P.I., Jarcev I.K. Polipropilen [Polypropylene]. L: Himija, 1967, 316 p.
  3. Voigt V. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928. 962 p.
  4. Reuss A. Z. Agnew. Math. Und Mech. 1929. V. 9. № 1. pp. 49-58.
-



5. Kurin S.V. Prognozirovanie modulja uprugosti polimernyh kompozicionnyh materialov dlja izdelij mashinostroenija [Prediction of the Elasticity Modulus of Polymer Composite Materials for Engineering Products]: dissertacija ... kandidata tehniceskikh nauk. Naberezhnye Chelny, 2011. 150 p.
6. Jakovlev M.Ja., Jangirova A.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1639](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1639)
7. Kaw Autar K. Mechanics of Composite Materials. London-NewYork: Taylor & Francis Group, 2006. 473 p.
8. Ochsner Andreas, Lucas F.M. Silva, Holm Altenbach. Mechanics and Properties of Composed Materials and Structures. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2012. 195 p.
9. Loginov V.T., Derlugjan P.D. Inzhenernyj vestnik Dona, 2007, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2007/46](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2007/46).
10. Verzhbovskij G. B. Naukovedenie. 2014. №7. pp. 909-914.
11. Petrochenkov R.G. Kompozity na mineral'nyh zapolniteljah [Composites on mineral aggregates]. V. 2. M.: Izd-vo moskovskogo gosudarstvennogo gornogo universiteta, 2005. 351 p.