



Интерпретируемая многокритериальная оценка для поиска ключевых точек на трёхмерных поверхностях

А.С. Сулимов, М.П. Романов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва

Аннотация: В статье рассматривается проблема определения ключевых точек на трёхмерных поверхностях физических объектов, необходимых для установки или фиксации элементов в инженерных и медицинских приложениях. Показано, что прямое определение таких точек на реальных объектах затруднено ограниченным доступом, вариативностью геометрии и требованием высокой точности, вследствие чего применяется анализ на основе цифровых 3D-моделей, учитывающих как внешнюю, так и внутреннюю структуру. Предложен интерпретируемый подход к многокритериальной оценке пригодности точек, основанный на нечётко-логическом выводе, позволяющий согласовывать жёсткие ограничения и предпочтительные критерии, характерные для различных предметных областей. Методологическая база исследования включает системный анализ литературы, интеграцию экспертных знаний и математическую формализацию многокритериального выбора. Особое внимание уделено вопросам объяснимости и переносимости решений, что критично для медицинских приложений (анатомические ориентиры) и инженерных/робототехнических задач (геометрические и технологические ориентиры). Показано, что разработанная модель формирует тепловые карты пригодности и позволяет автоматически выявлять набор допустимых точек, согласованный с экспертными разметками и требованиями безопасности.

Ключевые слова: поиск ключевых точек, нечёткий-логический вывод, экспертная система поддержки принятия решений.

Введение

Во многих инженерных и медицинских задачах требуется определение специальных точек на поверхности реального объекта, которые обладают устойчивыми геометрическими, топологическими или функциональными свойствами и могут служить основой для анализа, позиционирования или взаимодействия с объектом. Например, в робототехнике требуются поиск таких точек захвата объекта, которые одновременно обеспечивают его устойчивость и достижимость манипулятора с учётом возможных коллизий [1]; в ортодонтии при проектировании индивидуальных ортодонтических аппаратов определяют точки для установки опорных элементов [2].

В ряде исследований для выбора ключевых точек рассматривается поверхность объекта [3, 4]. Однако зачастую существенную роль играют внутренние характеристики объекта [5]. В инженерных случаях это могут быть толщина стенок целевого объекта, наличие внутренних пустот, неоднородности материала. В медицинских приложениях решающими оказываются параметры внутренней структуры тканей: толщина кортикальной пластиинки, расстояние до критических анатомических структур [6]. Следовательно, корректная постановка задачи должна учитывать как признаки поверхности, так и внутренние характеристики, получаемые из томографических данных и их совмещения с поверхностными моделями.

Современные методы анализа трёхмерных данных сталкиваются с рядом трудностей: вариативность геометрии объектов [7], наличие шумов и артефактов, полученных при сканировании [8], сложность интерпретации алгоритмических решений и необходимость учёта множества критериев, нередко противоречивых. В инженерных приложениях важны параметры прочности, технологичности и стабильности опорных зон; в медицинских — анатомическая целесообразность, биомеханическая устойчивость и минимальная инвазивность. Это делает задачу многокритериальной по своей природе и требует балансировки между жёсткими ограничениями и экспертными предпочтениями.

Дополнительной проблемой остаётся интерпретируемость моделей, особенно в условиях растущего применения методов машинного обучения [9]. Большинство существующих алгоритмов для поиска ключевых точек функционируют как «чёрные ящики», что затрудняет их использование в областях, где необходима объяснимость решений, например, в медицине и критических инженерных системах.



Математическая формализация задачи

Единую трёхмерную модель объекта можно представить как множество точек:

$$P = \{p_i \in \mathbb{R}^3 | i = 1, \dots, N\}, \quad (1)$$

где $p_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ – координаты точек поверхности модели, N – общее количество точек. В таком случае $S \subset P$ – подмножество точек на поверхности P , описывающее некоторую зону интереса для поиска.

Тогда задача определения ключевых точек на этой поверхности может быть сформулирована как задача нахождения координат точек $v_j \in S, j = 1, \dots, M$ на модели, удовлетворяющих определенным критериям и ограничениям (M – требуемое количество точек).

Критерии, влияющие на выбор точек v_j можно определить как функции:

$$f_i(v), i = 1, \dots, K, \quad (2)$$

где K – общее количество критериев.

Искомые точки v_j должны максимизировать некоторую обобщённую функцию $F(v)$:

$$F(v) = \sum_{i=0}^K w_i f_i(v), \quad (3)$$

где $w_i \in \mathbb{R}$ – весовые коэффициенты факторов, отражающие их значимость.

Таким образом задачу определения ключевых точек можно определить как задачу поиска максимума:

$$\max_{v_i \in S} \sum_{i=0}^M F(v_i), \quad (4)$$

то есть необходимо найти такие уникальные точки на поверхности S , сумма значений функций пригодности $F(v)$ которых будет максимальна.

Описание метода

Использование бинарных подходов к принятию решений, предполагающих однозначное соответствие критериям, недостаточно

эффективно в задаче поиска ключевых точек на трёхмерных поверхностях моделей физических объектов, поскольку не учитывает возможность промежуточных значений и не позволяет проводить тонкую градацию пригодности точек. В рамках метода предлагается использовать аппарат нечёткой логики как формализованную основу экспертной системы для решения задачи определения ключевых точек на трёхмерных поверхностях. Нечёткая логика рассматривается как строгий математический инструмент построения экспертной системы, в которой правила задаются в виде лингвистических переменных, функций принадлежности и производственных правил [10]. Выбор нечёткой логики обусловлен необходимостью эффективно работать с неопределённостью и многокритериальностью задачи, что существенно улучшает качество и повышает интерпретируемость принимаемых решений.

На рис. 1 представлена блок-схема предлагаемого метода для определения ключевых точек на основании заранее заданных правил. Входными параметрами являются: V – трёхмерная модель объекта; $S \in \mathbb{R}^3$ – поверхность модели V ; H – множество жёстких критериев, которые должны быть обязательно соблюдены; K – множество нечётких правил, выполнение которых может регулироваться весами W . Предполагается, что веса задаются экспертами при формировании множества optionalных критериев.

Метод основывается на итеративной оценке точек на поверхности модели. Для этого для каждой точки $p \in S$ первично проверяется соответствие жёстким критериям. При выполнении всех условий вычисляются функции принадлежности $\mu_k(p) \in [0, 1], k = [1, \dots, K]$. Полученные нечёткие оценки агрегируются в интегральную функцию принадлежности с помощью t-нормы. В качестве искомой выбирается точка, максимизирующая данную функцию.

Каждый нечёткий критерий сопоставляется с некоторой геометрической или топологической характеристикой точки. Например, это может быть расстояние до заданной области, значение локальной кривизны, расстояние до определенной точки на поверхности, либо внутренней структуры. Вид функций принадлежности и их параметры задаются заранее и определяются экспертно.

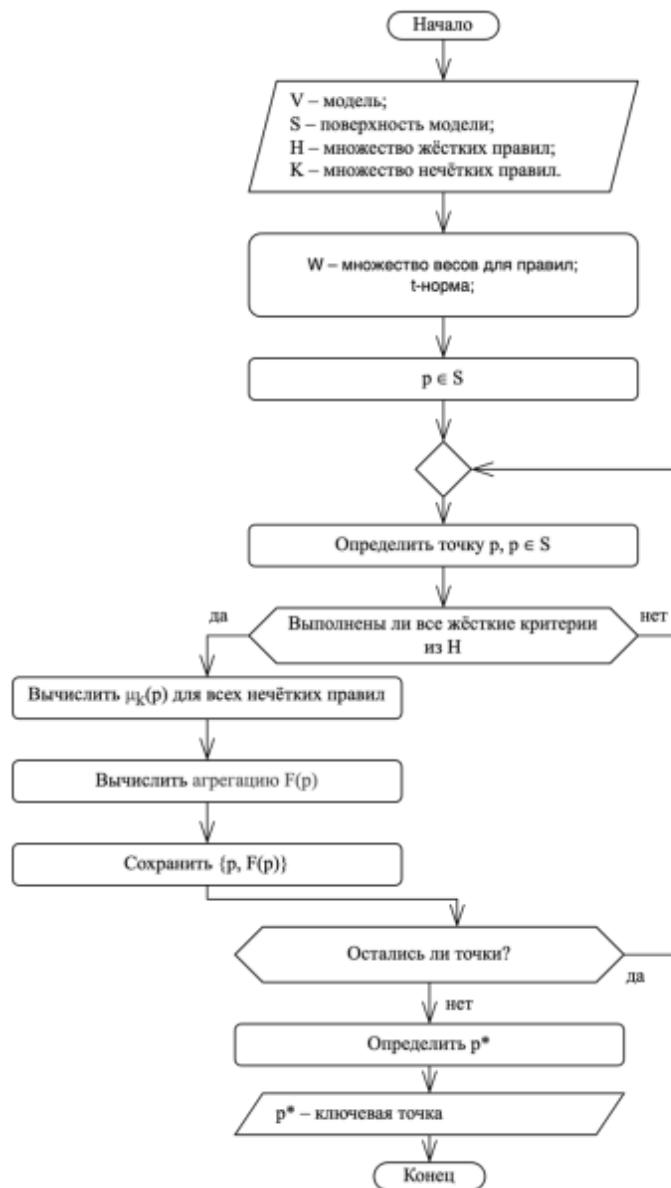


Рис. 1. – Блок-схема метода

Для дискретизации поверхности предполагается использование моделей объектов в формате стереолитографии (Stereolithography – STL),

который позволяет получить информацию о точках на поверхности, аппроксимируя её с определенной точностью.

На первом этапе для каждой точки кандидата выполняется проверка жёстких правил, которые задаются в виде булевых функций:

$$H_i(p) = \begin{cases} 0, & \text{если условие не выполнено} \\ 1, & \text{если условие выполнено} \end{cases}, \quad (5)$$

Если для некоторой точки p существует хотя бы один критерий H_i , такой что $H_i(p) = 0$, точка считается недопустимой. В противном случае вычисляются функции принадлежности $\mu_k(p) \in [0, 1], k = [1, \dots, K]$. Каждая функция принадлежности описывает степень выполнения соответствующего критерия. После получения всех значений $\mu_k(p)$ вычисляется агрегированная интегральная оценка $F(p)$. В качестве агрегирующего оператора используется t-норма T [11]. С учётом весов w_k интегральная функция определяется как:

$$F(p) = T(\mu_1(p)^{w_1}, \mu_2(p)^{w_2}, \dots, \mu_K(p)^{w_K}). \quad (6)$$

После вычисления значений $F(p)$ для всех точек-кандидатов осуществляется выбор результирующей точки p' . В качестве критерия оптимальности используется принцип максимального выполнения условий:

$$p' = \operatorname{argmax}_{p \in S} F(p). \quad (7)$$

Предлагаемый подход позволяет получить интерпретируемые результаты, так как каждому критерию соответствует отдельная функция принадлежности, что позволяет явно отследить вклад каждого условия в итоговую оценку. Метод не привязан к конкретной предметной области и может быть применён для решения задачи нахождения ключевых точек на трёхмерных поверхностях объектов.

Практическая апробация

В рамках применения на практике описанного метода решается задача оценки пригодности точки на трёхмерной модели челюсти пациента для установки минивинтов для ортодонтического аппарата с кортикальной опорой. Актуальность задачи подтверждается в исследовании [12], согласно которому точность определения места положения минивинтов и их установки в безопасное место не превышает 70%.

В результате проведённого анализа 500 клинических случаев ортодонтических аппаратов с двумя нёбными минивинтами были выявлены и систематизированы факторы, оказывающие влияние на выбор положения установки имплантатов. На основе эмпирических данных, экспертной оценки проектных решений и анализа научной литературы выполнена классификация факторов по степени их критичности в процессе принятия проектных решений. В таблице 1 представлена классификация выявленных факторов.

Таблица №1
Формализация факторов

№	Критерий	Тип логики	Метод оценки
I	Ограничение глубины ввинчивания концом резьбы	Жёсткая	Сравнение с длиной резьбы минивинта
II	Отсутствие проникновения пояска и головки минивинта в слизистую	Нечёткая	S-образная функция принадлежности по глубине
III	Закрытие резьбовой части десной	Нечёткая	S-образная функция принадлежности по глубине

№	Критерий	Тип логики	Метод оценки
IV	Точка входа минивинта за третьей небной складкой	Нечёткая	Трапециевидная функция принадлежности от расстояния между ориентирами
V	Симметричность относительно сагиттальной плоскости	Нечёткая	Треугольная функция принадлежности
VI	Минимальное расстояние между минивинтами (6 мм)	Жёсткая	Расстояние между точками
VII	Угол оси минивинта относительно кортикальных пластин	Нечёткая	Трапециевидная функция от угла наклона оси минивинта
VIII	Выход вершины минивинта из второй кортикальной пластины на 1 мм	Нечёткая	Трапециевидная функция принадлежности расстояния между вершиной резьбы минивинта и костью.
IX	Вершина минивинта в пределах слизистой (в сочетании с фактором XI)	Нечёткая	Трапециевидная функция принадлежности расстояния между вершиной резьбы минивинта и костью.
X	Отступ минивинта от корней зубов	Жёсткая	Расстояние до ближайшего корня
XI	Бикортикальное удержание	Жёсткая / Нечёткая	Пересечение минивинтом плоскостей пластин.

Полученные результаты позволяют формализовать систему критериев, применимую как для экспертной оценки мест установки минивинтов, так и для разработки алгоритмов автоматического подбора оптимальных точек на цифровой модели нёба. Разделение факторов на критические и опциональные создает основу для построения иерархической функции пригодности, учитывающей приоритеты клинически значимых параметров.

Для критических факторов используются логические предикаты вида:

$$H_i(p) = \begin{cases} 1, & \text{если условие выполнено} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (5)$$

где p – точка на поверхности, H_i – предикат, соответствующий фактору.

Таким образом определяются следующие правила:

$H_X(p) = d(p, Z) \geq 2$ мм, где Z – поверхность корней зубов;

$H_{VI}(p_1, p_2) = \|p_2 - p_1\| \geq 6$ мм, где p_1, p_2 – точки на поверхности положения минивинтов (для ортодонтических аппаратов на двух минивинтах);

$H_I(p) = depth(p) \leq l$, где l – длина резьбы планируемых минивинтов.

Для опциональных критериев используется нечёткая оценка, то есть каждый критерий описывается функцией принадлежности $\mu_i(p) \in [1,0]$, где p может являться любым входным параметром, участвующим в условии.

В качестве эксперимента случайным образом были выбраны 40 моделей, которые предварительно были размечены экспертами, то есть были определены координаты ключевых точек.

На рис. 2 представлены результаты работы метода. Синим цветом обозначены точки, которые были определены экспертами, жёлтым – вычисленные точки.

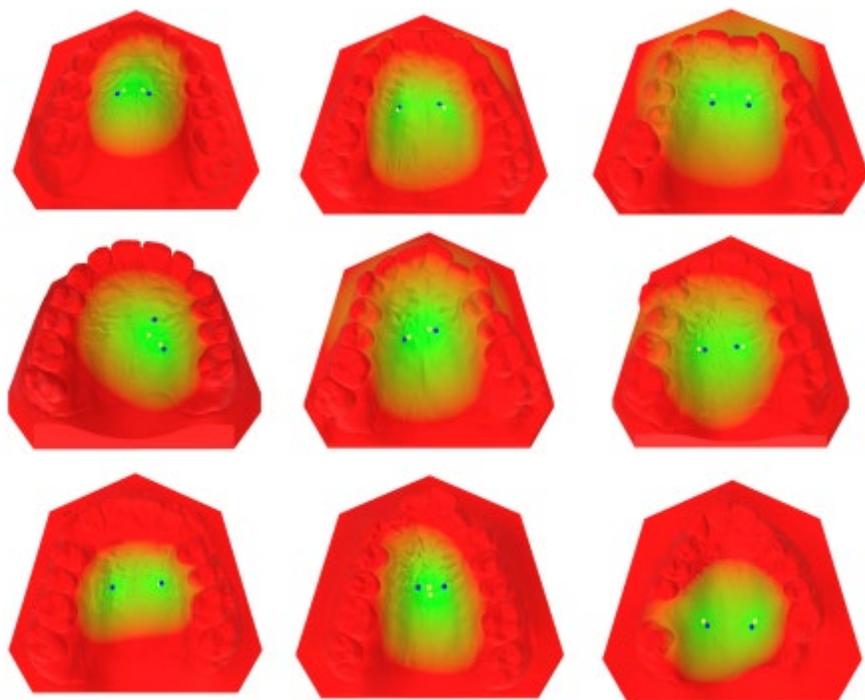


Рис. 2. – Результаты определения ключевых точек.

Для каждой модели было измерено расстояние между определенной ключевой точкой и размеченной экспертом. На рис. 3 представлен график, отражающий полученную ошибку для каждой из моделей, в качестве допустимой ошибки использовалось значение 4мм. По результатам можно сделать вывод, что в 77,5% случаев были получены результаты со средней ошибкой менее 4мм.

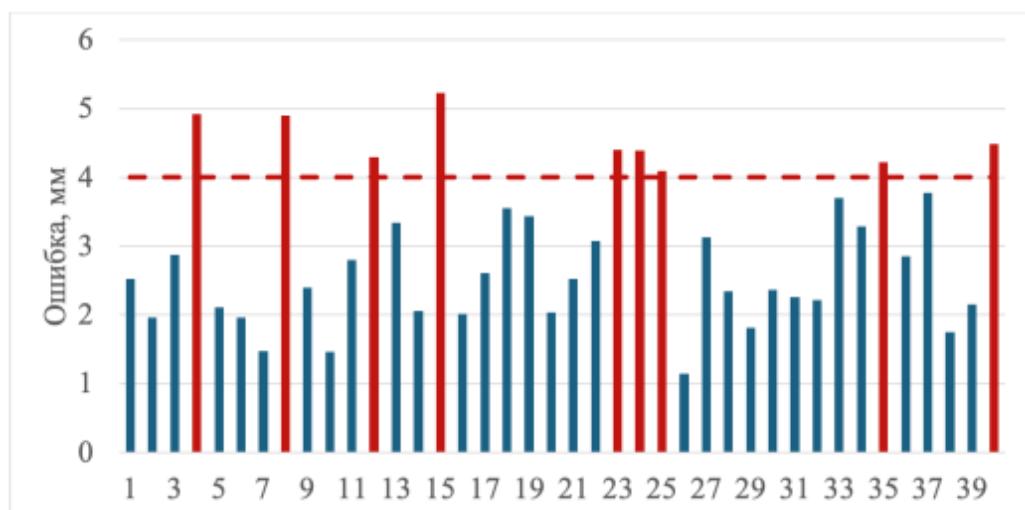


Рис. 3. – Значение максимальной ошибки, мм.

Так как в качестве ключевых точек в каждом случае искались две точки, то можно определить точность определения каждой отдельной точки в рамках модели. На рис. 4 представлен график, показывающий превышение 4мм порога для каждой модели эксперимента. Для некоторых моделей результаты для точек в паре отличаются. На рис. 5 показано накопленное распределение ошибок, полученных в рамках эксперимента. Таким образом более 80% ключевых точек были определены с ошибкой менее 4мм.

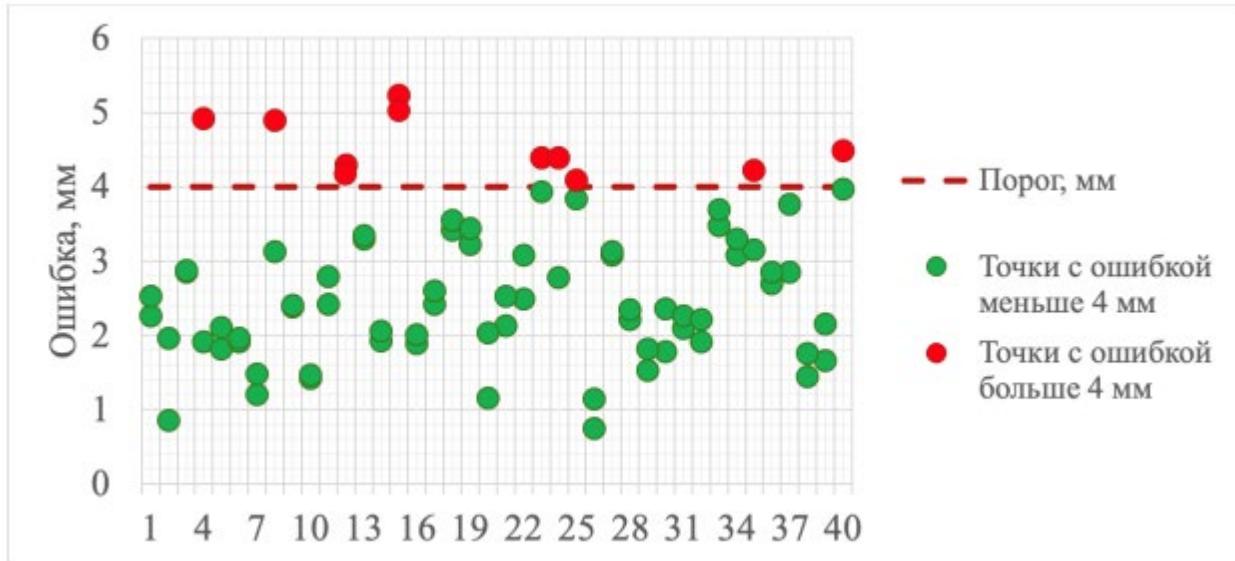


Рис. 4. – Распределение ошибок при расчёте двух точек, мм.

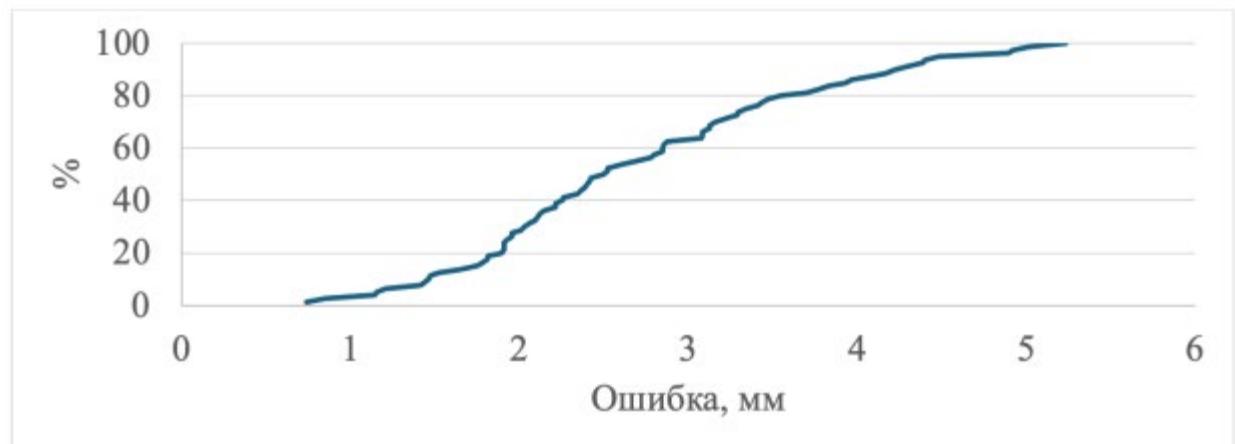


Рис. 5. – График накопленного распределения ошибок.



Обсуждение и выводы

В настоящем исследовании формализована общая задача определения ключевых точек на трёхмерных моделях для различных предметных областей (клиника, робототехника, промышленность). Постановка учитывает как поверхностные признаки, так и внутренние характеристики объекта и различает два класса критериев: жёсткие ограничения (запретные зоны, минимальные расстояния) и предпочтительные условия (технологичность, симметрия, доступность для устройств).

Предложен интерпретируемый метод, комбинирующий нечеткологический вывод с системой жёстких правил. Жёсткие правила задают допустимую область решений, а агрегация нечетких оценок формирует меру пригодности точки, позволяя согласовывать конфликтующие критерии.

Практическая апробация выполнена на клиническом кейсе выбора точек установки минивинтов при проектировании ортодонтических аппаратов на кортикальной опоре. Сформированы доменно-специфические наборы критических и предпочтительных факторов, построена база правил и показана согласованность результатов с экспертными разметками: получены тепловые карты пригодности и пары кандидатов, более 80% ключевых точек были определены с ошибкой менее 4мм.

Литература

1. Lee H., Toner T., Tilbury D.M., Barton K. GraspMixer: Hybrid of Contact Surface Sampling and Grasp Feature Mixing for Grasp Synthesis // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2025. V. 22. pp. 10920-10936. doi: 10.1109/TASE.2025.3530795.
2. Кирсанова Е. В., Кондратьева Н. А., Аветисян Л. М. Цифровые методики диагностики и планирования ортодонтического лечения с использованием кортикальной опоры // Клиническая стоматология. 2021. Т. 97. С. 102-109.



3. Волошкин А. А., Черкасов В. В., Скитова В. М., Перевузник В. С., Мамченкова А. А. Разработка вакуумного захватного устройства для криволинейной поверхности // Робототехника и техническая кибернетика. 2025. № 1. URL: cyberleninka.ru/article/n/razrabortka-vakuumnogo-zahvatnogo-ustroystva-dlya-krivolineynoy-poverhnosti (дата обращения: 04.11.2025).
4. Притыкин Ф. Н. Использование компьютерного моделирования движения руки антропоморфного робота для определения положения его основания относительно объектов манипулирования // Программные системы и вычислительные методы. 2025. № 1. URL: cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-kompyuternogo-modelirovaniya-dvizheniya-ruk-antropomorfного-robota-dlya-opredeleniya-polozheniya-ego-osnovaniya (дата обращения: 04.11.2025).
5. Liu Z., Chen Z., Zheng W. S. Simulating Complete Points Representations for Single-View 6-DoF Grasp Detection // IEEE Robotics and Automation Letters. 2024. V. 9, № 3. pp. 2901-2908. doi: [10.1109/LRA.2024.3358757](https://doi.org/10.1109/LRA.2024.3358757).
6. Nucera R., Costa S., Bellocchio A. M., Barbera S., Drago S., Silvestrini A., Migliorati M. Evaluation of palatal bone depth, cortical bone, and mucosa thickness for optimal orthodontic miniscrew placement performed according to the third palatal ruga clinical reference // European Journal of Orthodontics. 2022. V. 44, № 5. pp. 530-536. doi: [10.1093/ejo/cjac007](https://doi.org/10.1093/ejo/cjac007).
7. Ravie N. S., M K. V., Thondiyath A., Sebastian B. QuickGrasp: Lightweight Antipodal Grasp Planning with Point Clouds // 2025 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Atlanta, GA, USA. 2025. pp. 1-7. doi: [10.1109/ICRA55743.2025.11128143](https://doi.org/10.1109/ICRA55743.2025.11128143).
8. Jang T. J., Yun H. S., Hyun C. M., et al. Fully automatic integration of dental CBCT images and full-arch intraoral impressions with stitching error

correction via individual tooth segmentation and identification // Medical Image Analysis. 2024. V. 93:103096. doi: 10.1016/j.media.2024.103096.

9. Murad N. Y., Hasan M. H., Azam M. H., Yousuf N., Yalli J. S. Unraveling the Black Box: A Review of Explainable Deep Learning Healthcare Techniques // IEEE Access. 2024. V. 12. pp. 66556-66568. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3398203.

10. Saatchi R. Fuzzy Logic Concepts, Developments and Implementation. // Information. 2024. V. 15:656. doi: 10.3390/info15100656.

11. Аверкин А. Н., Костерев В. В. Триангулярные нормы в системах искусственного интеллекта // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2000. № 5. С. 106-109.

12. De Stefano A., Guarnieri R., Fiorelli B., et al. Clinical Experience and Digital Knowledge in Virtual Planning of Palatal Orthodontic Miniscrew Insertion // Applied Sciences. 2023. V. 13, № 13. 7474. doi: 10.3390/app13137474.

References

1. Lee H., Toner T., Tilbury D. M., Barton K. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2025. V. 22. pp. 10920-10936. doi: 10.1109/TASE.2025.3530795.

2. Kirsanova E. V., Kondratyeva N. A., Avetisyan L. M. Klinicheskaya stomatologiya. 2021. V. 97. pp. 102-109.

3. Voloshkin A. A., Cherkasov V. V., Skitova V. M., Perevuznik V. S., Mamchenkova A. A. Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika. 2025. № 1. URL: cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-vakuumnogo-zahvatnogo-ustroystva-dlya-krivolineynoy-poverhnosti (accessed: 04.11.2025).

4. Pritykin F. N. Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. 2025. № 1. URL: cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-kompyuternogo-modelirovaniya-



dvizheniya-ruk-antropomorfного-робота-dlya-opredeleniya-polozheniya-ego-osnovaniya (accessed: 04.11.2025).

5. Liu Z., Chen Z., Zheng W. S. IEEE Robotics and Automation Letters. 2024. V. 9, № 3. pp. 2901-2908. doi: 10.1109/LRA.2024.3358757.
6. Nucera R., Costa S., Bellocchio A. M., Barbera S., Drago S., Silvestrini A., Migliorati M. European Journal of Orthodontics. 2022. V. 44, № 5. pp. 530-536. doi: 10.1093/ejo/cjac007.
7. Ravie N. S., M K. V., Thondiyath A., Sebastian B. 2025 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Atlanta, GA, USA. 2025. pp. 1-7. doi: 10.1109/ICRA55743.2025.11128143.
8. Jang T. J., Yun H. S., Hyun C. M., et al. Medical Image Analysis. 2024. V. 93. 103096. doi: 10.1016/j.media.2024.103096.
9. Murad N. Y., Hasan M. H., Azam M. H., Yousuf N., Yalli J. S. IEEE Access. 2024. V. 12. pp. 66556-66568. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3398203.
10. Saatchi R. Information. 2024. V. 15. 656. doi: 10.3390/info15100656.
11. Averkin A. N., Kosterev V. V. Izvestiya Akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya. 2000. № 5. pp. 106-109.
12. De Stefano A., Guarnieri R., Fiorelli B., et al. Applied Sciences. 2023. V. 13, № 13. 7474. doi: 10.3390/app13137474.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 6.12.2025

Дата публикации: 6.01.2026