

## Расчет извилистости границ плоских фигур

*Э.Н. Егерова, К.А. Чопуров*

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*

**Аннотация:** В работе рассмотрена извилистость правильных  $n$ -угольников, фракталов и извилистость границ прямоугольной трапеции. Получено значение извилистости  $\omega_n$  в предельном случае. Для всех рассмотренных фигур построены зависимости значений извилистости от количества сторон правильного  $n$ -угольника и от  $n$ -ой итерации для рассматриваемого фрактала. Для границы прямоугольной трапеции построены графики зависимости границы извилистости от углового коэффициента прямой  $y=px+q$ , ограничивающей рассматриваемую трапецию. Показано, что при увеличении количества итераций в каждом фрактале значение извилистости растёт, а его предельное значение стремится к бесконечности.

**Ключевые слова:** извилистость, замкнутый контур, фрактал, правильные  $n$ -угольники, снежинка Коха, границы контура.

### Введение

Понятие извилистости очень часто используют в географии при рассмотрении извилистости береговой линии и в работе с геодезической картой, а также в геологии. Например, авторы [1,2] на основе спектрального анализа поверхности трещин обосновали критерий выделения и оценки извилистости горных пород, которая является базовым показателем для построения паспорта прочности пород при их сдвиге по трещине, а также установили зависимость параметра дилатансии от коэффициента извилистости трещин. В статье [3] были произведены расчеты извилистости границ аллювиального участка реки Тисы для определения нагрузки на насосы. Автор [4] продемонстрировал зависимость извилистости реки от объёма речного стока. В свою очередь, в работе [5] построена математическая модель термических и гидротермических процессов котловины Онежского озера, где используют границы его рельефа дна. В статье [6] проведены экспериментальные исследования тяжёлых металлов в Таганрогском заливе Азовского моря, в частности использовались границы поверхностного слоя его воды. Автор [7] изучил извилистость однородных

---

участков рек с помощью фрактального метода и установил зависимость фрактальной размерности от извилистости русла. В статье [8] авторы предоставили данные об исследовании зависимости извилистости пор сыпучей среды от значения пористости и плотности упаковки среды в графическом и аналитическом виде. Авторы [9] на основе теории обобщенной проводимости и капиллярной теории получили формулу для определения коэффициента извилистости. В статье [10] автор установил определяющее влияние на коэффициент извилистости пор степени срошенности частиц и плотности их упаковки, а также представил метод расчета коэффициента извилистости пор.

Под извилистостью  $\omega$  замкнутого контура, ограничивающего площадь  $S$ , понимают отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади  $S$ .

$$\omega = P / (2\pi R), \text{ где } S = \pi R^2, \text{ т.е. } R = \sqrt{S/\pi}, \text{ откуда } \omega = P / (2\pi \sqrt{S/\pi}) = P / (2\sqrt{\pi S})$$

### Извилистость границ правильного многоугольника

Рассмотрим правильный многоугольник, где  $a$  – длина стороны правильного  $n$ -угольника. Найдём извилистость для различных значений  $n$ .

Пусть  $n=5$ , тогда извилистость границ правильного пятиугольника равна:

$$\omega_5 = 5a_5 / (2\sqrt{\pi S_5}) = 5 \cdot 2R \sin(\pi/5) / (2\sqrt{\pi \cdot 5R \sin(\pi/5) \cdot R \cdot \cos(\pi/5)}) \approx 1,0756.$$

У правильного шестиугольника имеем извилистость границ равна :

$$\omega_6 = 6a_6 / (2\sqrt{\pi S_6}) = 6 \cdot 2R \sin(\pi/6) / (2\sqrt{\pi \cdot 6R \sin(\pi/6) \cdot R \cdot \cos(\pi/6)}) \approx 1,05.$$

Для извилистости границ правильного семиугольника имеем:

$$\omega_7 = 7a_7 / (2\sqrt{\pi S_7}) = 7 \cdot 2R \sin(\pi/7) / (2\sqrt{\pi \cdot 7R \sin(\pi/7) \cdot R \cdot \cos(\pi/7)}) \approx 1,036.$$

Извилистость границ правильного восьмиугольника равна:

$$\omega_8 = 8a_8 / (2\sqrt{\pi S_8}) = 8 \cdot 2R \sin(\pi/8) / (2\sqrt{\pi \cdot 8R \sin(\pi/8) \cdot R \cdot \cos(\pi/8)}) \approx 1,027.$$

Аналогично, при любых значениях  $n$ , в том числе достаточно больших, можно рассчитать  $\omega_n$ . Так, если  $n=100$ , то:

$$\omega_{100} = 100a_{100} / (2\sqrt{\pi S_{100}}) = 200R \sin(\pi/100) / [2\sqrt{\pi 100R \sin(\pi/100)R \cdot \cos(\pi/100)}] \approx 1.$$

(1)

Пусть  $n$ - любое число, тогда по определению извилистости, получим:

$$\omega_n = n \cdot a_n / (2\sqrt{\pi S_n}) = n \cdot 2 \cdot R \cdot \sin(180^\circ/n) / (2\sqrt{(\pi \cdot n \cdot R \cdot \sin(\pi/n) \cdot R \cdot \cos(\pi/n))}) = n \cdot \sin(\pi/n) / \sqrt{\pi \cdot n \cdot \sin(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)} = \sqrt{n \cdot \sin(\pi/n) / (\pi \cdot \cos(\pi/n))} = \sqrt{\sin(\pi/n) / (\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)} = \sqrt{\operatorname{tg}(\pi/n) / (\pi/n)}$$

Рассмотрим предельное значение извилистости правильного  $n$ -угольника  $\omega_n$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Из (1) получим с учётом первого замечательного предела:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n \cdot \sin(\pi/n) / [\pi \cdot \cos(\pi/n)]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\sin(\pi/n) / (\pi/n)}$$

На рис.1 показана зависимость значения извилистости границы правильного многоугольника от количества его сторон.

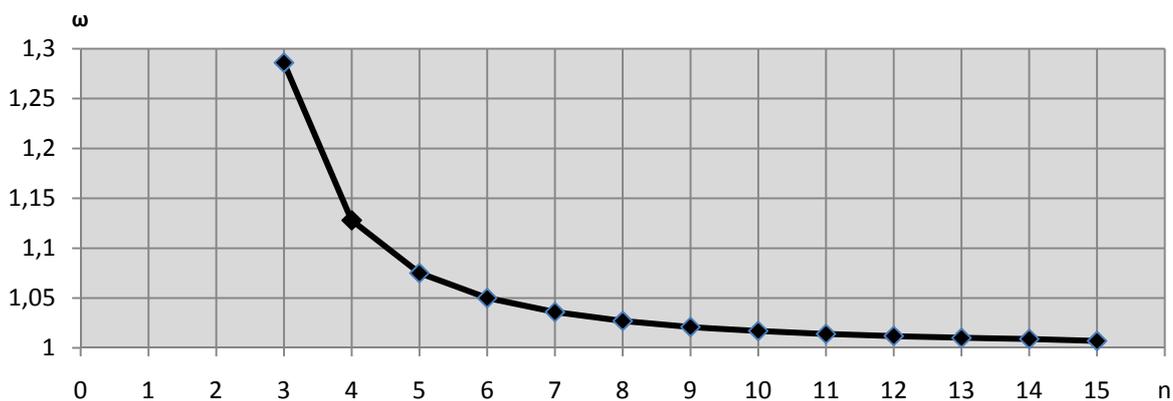


Рис. 1. –Зависимость извилистости от количества сторон  $n$  правильного многоугольника.

Таким образом, при увеличении количества сторон правильного  $n$ -угольника значение извилистости его границы стремится к 1.

## Извилистость границы снежинки Коха

Снежинка Коха – это фрактал, который строится на основе равностороннего треугольника.

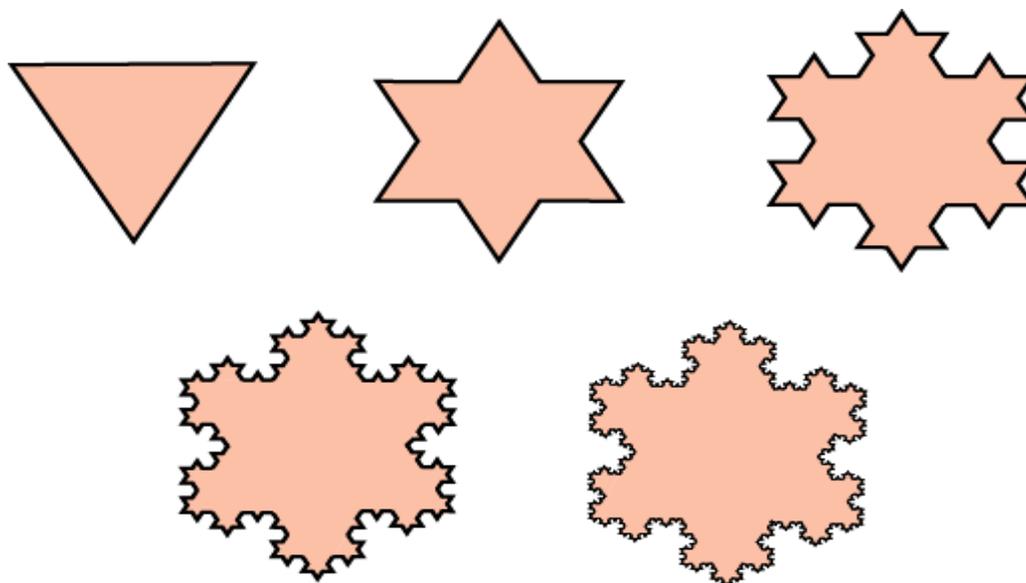


Рис.2. –Построение снежинки Коха при  $i=1,2,3,4,5$

Возьмём в качестве длины стороны исходного треугольника  $l=1$ , тогда число отрезков такой длины, которые покрывают снежинку Коха на этом шаге равно трём. Затем при переходе к следующему шагу (рис.2) имеем  $l'=1/3$ , а число отрезков равно 12. Поэтому размерность снежинки Коха равна:  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618$ , т.е. при увеличении снежинки Коха в 3 раза, её длина возрастает в 4 раза и т.д.

Рассчитаем извилистость границы снежинки Коха при  $n$ -ой итерации:

$$n=0: l_0=3a, S_0=a^2\sqrt{3}/4; \quad n=1: l_1=4a, S_1=a^2\sqrt{3}/3;$$

$$n=2: l_2=16/3a, S_2=4a^2\sqrt{3}/9 \dots l_n=(4/3)^n 3a, S_n=(4/3)^n (a^2\sqrt{3})/4, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда извилистость границы снежинки Коха при  $n$ -ой итерации равна:

$$\omega_n = l_n / (2\sqrt{\pi S_n}) = (4/3)^n \cdot 3a / [2\sqrt{\pi} \cdot (4/3)^{(n/2)} (a^2\sqrt{3})/2] = 3 / \sqrt{\pi\sqrt{3}} \cdot (4/3)^{(n/2)}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что закон  $\omega_n = \omega_n(n)$  – показательный закон, который выражен геометрической прогрессией со знаменателем  $q=2/\sqrt{3}$ .

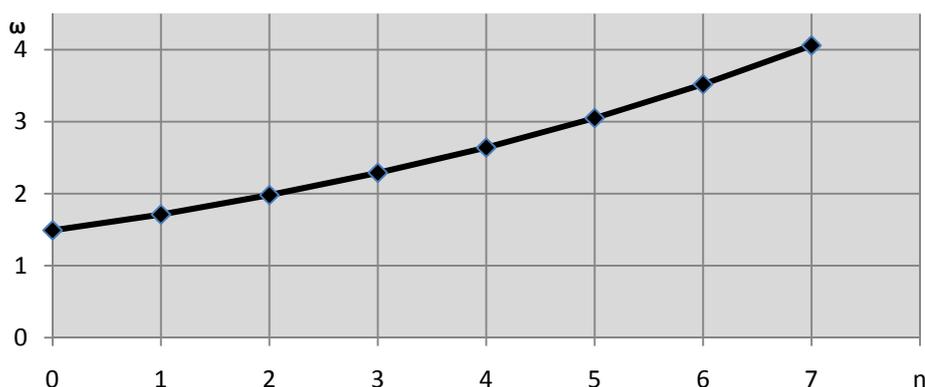


Рис. 3.—Зависимость извилистости границы снежинки Коха от n-ой итерации.

Предельное значение извилистости границы снежинки Коха:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = 3 / \sqrt{\pi \sqrt{3}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (4/3)^{(n/2)} = +\infty.$$

### Извилистость границ трапеции

Рассмотрим извилистость границы прямоугольной трапеции, ограниченной линиями  $y=px+q$ ,  $x_1=a$ ,  $x_2=b$  и осью  $Ox$ .

Пусть,  $p=3$ ,  $q=0$  и  $x_2=b=3$  - фиксированные значения, а  $x_1=a$ . Будем изменять значения  $a$  - левого конца отрезка  $[a,b]$ .

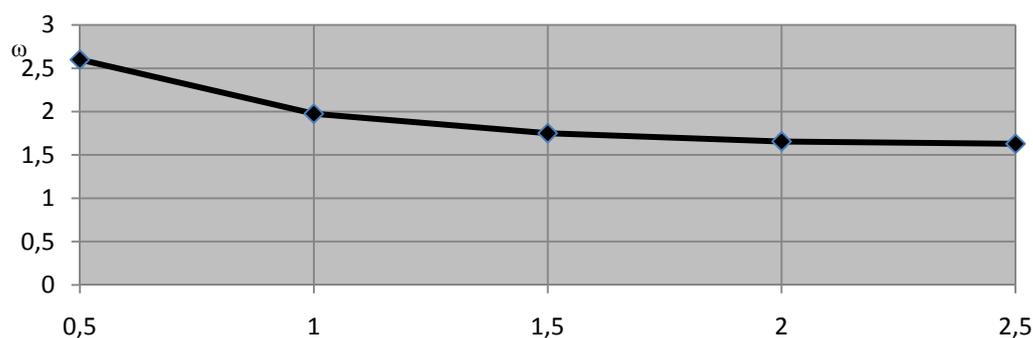
Рассмотрим несколько случаев при  $a = 2,5; 2; 1,5; 1; 0,5$ .

Пусть  $a=2,5$ . Периметр прямоугольной трапеции:  $P=0,5+9+\sqrt{1,5^2 + 0,5^2}+7,5 \approx 18,58$ . Площадь прямоугольной трапеции  $S=0,5 \cdot (7,5+9) \cdot 0,5=4,125$ . По определению извилистости находим  $\omega_{2,5a}$ :  $\omega_{2,5a} = 18,58 / (2 \cdot \sqrt{\pi \cdot 4,125}) \approx 2,58$ .

Для  $a=2$  по аналогии находим периметр, площадь, а затем извилистость границы прямоугольной трапеции для каждого случая,  $a=1,5$ ;  $a=1$ ;  $a=0,5$ .

$$\omega_{2a} = 19,16 / (2 \cdot \sqrt{7,5\pi}) \approx 1,975; \quad a=1,5: \omega_{1,5a} = 19,74 / (2 \cdot \sqrt{10,125\pi}) \approx 1,75;$$

$$a=1: \omega_{1a} = 20,32 / (2 \cdot \sqrt{12\pi}) \approx 1,655; \quad a=0,5: \omega_{0,5a} = 20,906 / (2 \cdot \sqrt{13,125\pi}) \approx 1,628.$$



a

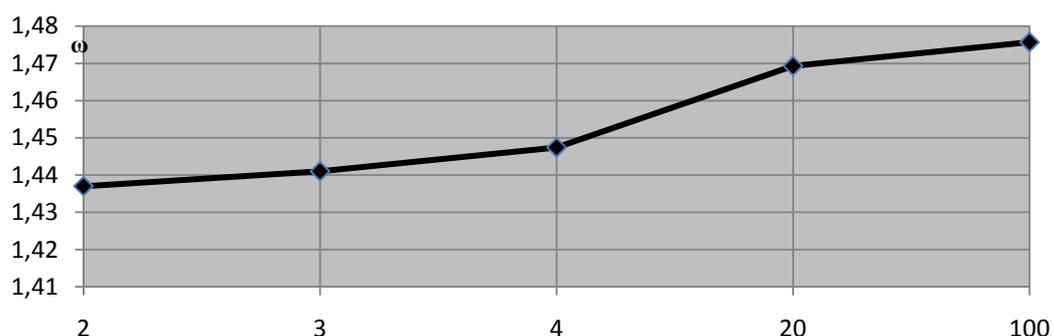
Рис. 4. – Зависимость извилистости границы прямоугольной трапеции от величины a.

Таким образом, при фиксированных значениях границ прямоугольной трапеции, ограниченной данными прямыми извилистость её границ уменьшается с уменьшением величины a. Рассмотрим случай  $p=2$ ,  $q=1$  и  $a=0$  – значения  $b = 2;3;4;20$ . По аналогии находим извилистость границы прямоугольной трапеции для каждого случая по отдельности.

$$b=2: \omega_{2b}=12,472/(2\sqrt{6\pi})\approx 1,437; \quad b=3: \omega_{3b}=17,7/(2\sqrt{12\pi})\approx 1,441;$$

$$b=4: \omega_{4b}=22,94/(2\sqrt{20\pi})\approx 1,4474; \quad b=20: \omega_{20b}=106,72/(2\sqrt{420\pi})\approx 1,4693;$$

$$b=100: \omega_{100b}=525,61/(2\sqrt{10100\pi})\approx 1,4757.$$



b

Рис. 5. – Зависимость извилистости границы прямоугольной трапеции от величины b.

Таким образом, при фиксированных значениях границ прямоугольной трапеции, ограниченной прямой  $y=2x+1$ ,  $a=0$  и осью  $Ox$ , значение извилистости границы  $\omega$  стремится к 1,476 при  $b \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $q=0$ ,  $b=3$  и  $a=1$  – фиксированные значения, а значение  $p$  будем изменять. Рассмотрим несколько случаев при  $p=0,5; 1; 1,5; 2$ .

1)  $p=0,5$ :  $y=0,5x$ ; Находим извилистость границы прямоугольной трапеции, ограниченной данной прямой, прямыми  $a=1$ ,  $b=3$  и осью  $Ox$ .

$$\omega_{0,5p} = 0,5 + 2 + 1,5 + \sqrt{2^2 + 1,5^2} / (2\sqrt{0,5\pi(0,5 + 1,5) \cdot 2}) \approx 6,5 / 5,012 \approx 1,2969.$$

2)  $p=1$ :  $y=x$ ; По аналогии находим извилистость границы прямоугольной трапеции для каждого случая по отдельности.

$$\omega_{1p} = 1 + 2 + 3 + \sqrt{2^2 + 2^2} / (2\sqrt{0,5\pi(1 + 3) \cdot 2}) \approx 1,246.$$

3)  $p=1,5$ :  $y=1,5x$ ;  $\omega_{1,5p} = 1,5 + 2 + 4,5 + \sqrt{3^2 + 2^2} / (2\sqrt{\pi(1,5 + 4,5)}) \approx 1,3369.$

4)  $p=2$ :  $y=2x$ ;  $\omega_{2p} = 2 + 2 + 6 + \sqrt{2^2 + 4^2} / (2\sqrt{0,5\pi(2 + 6) \cdot 2}) \approx 1,4439.$

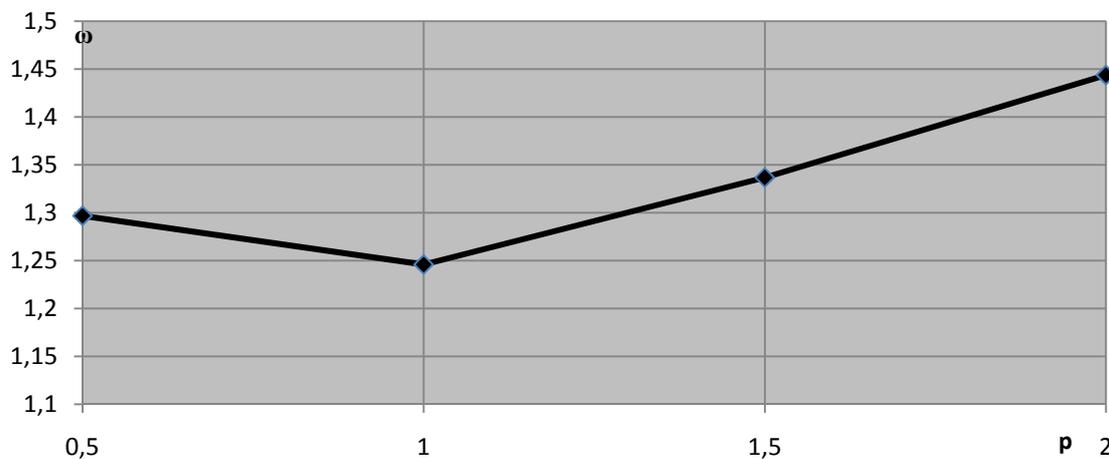


Рис. 6. – Зависимость извилистости границы прямоугольной трапеции от углового коэффициента прямой ограничивающей прямоугольную трапецию.

Таким образом, при фиксировании численных значений границ прямоугольной трапеции, ограниченной прямой  $y=px$ ,  $x_1=1$ ,  $x_2=3$  и осью  $Ox$  для рассмотренных значений  $p$ , минимальное значение извилистости замкнутого контура плоской фигуры достигается при  $p=1$ .

Пусть  $p=2$ ,  $b=2$  и  $a=1$  – фиксированные значения, а значение  $q$  будем изменять. Рассмотрим несколько случаев при  $q = 1;2;3;4$ . По аналогии находим периметр, площадь, а затем извилистость границы прямоугольной трапеции для каждого случая по отдельности.

$$q=1: \omega_{1q}=11,236/(2\sqrt{4\pi})\approx 1,585; \quad q=2: \omega_{2q}=13,236/(2\sqrt{5\pi})\approx 1,67;$$

$$q=3: \omega_{3q}=15,236/(2\sqrt{6\pi})\approx 1,755; \quad q=4: \omega_{4q}=17,236/(2\sqrt{7\pi})\approx 1,838.$$

Таким образом, если,  $a=1$ ,  $b=2$  и  $p=2$  – фиксированные значения, то зависимость извилистости границы прямоугольной трапеции  $\omega$  от свободного коэффициента  $q$  ограничивающей прямой  $y=px+q$  практически линейная.

В общем виде извилистость границы прямоугольной трапеции, ограниченной прямыми  $y=px+q$ ,  $x_1=a$ ,  $x_2=b$  и осью  $Ox$ :

$$\omega=(b-a)(1+\sqrt{1+p^2})+(a+b)p+2q/(\sqrt{2\pi(b-a)(p(a+b)+2q)}),$$

где периметр  $P=(b-a)+(b-a)\sqrt{1+p^2}+(a+b)p+2q$ , а площадь  $S=0,5[(pa+q)+(pb+q)](b-a)$ , здесь  $p=\operatorname{tg} \alpha$ , так как  $1/\cos \alpha^2=1+\operatorname{tg}^2 \alpha=1+p^2$ , то  $1/\cos \alpha=\sqrt{1+p^2}$ .

### Литература

1. Франц В.В. Исследование фрактальных характеристик трещиноватости для прогноза прочности и устойчивости породного массива // Проблемы недропользования. Институт горного дела УрО РАН. 2017. №1(12). С. 89-95.

2. Латышев О.Г., Прищепа Д.В. Исследование дилатансии при сдвиге горных пород по трещине // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. Уральский государственный горный университет (Екатеринбург). 2016. №4. С. 55-59.



3. Timar G. Controls on channel sinuosity changes: a case study of the Tisza river, the great hungarian plain // Quaternary science reviews. Elsevier science publishing company, inc. 2003. №20. pp. 2199-2207.

4. Tukur A. L., Mubi A. M. Impact of Kiri dam on the lower reaches of river Gongola // GEOJOURNAL, Springer Science+Business Media B.V., Formerly Kluwer Academic Publishers B.V. 2002. №2. pp. 93-96.

5. Баклагин В.Н. Построение математической модели котловины Онежского озера // Инженерный вестник Дона, 2013, №3, URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1767.

6. Вишневецкий В.Ю., Ледяева В.С. Экспериментальные исследования динамики концентрации тяжелых металлов в поверхностном слое воды в Таганрогском заливе // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 часть 1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1140.

7. Мельник М.А. Фрактальный анализ извилистости рек (на примере томской области) // Вестник томского государственного университета. Национальный исследовательский томский государственный университет (Томск). 2010. №335. С. 168-176.

8. Сандуляк Д.А., Сандуляк А.А., Ершова В.А., Сандуляк А.В., Кононов М.А. Определение извилистости пор в слое сыпучей среды на основании моделей квазиограниченных ячеек и пор-трубок // Стекло и керамика. "Ладья" (Москва). 2016. №9. С. 28-31.

9. Никитин В.И., Кофанов В.А. Определение коэффициента извилистости капилляров строительных материалов при расчете влагопереноса // Вестник полоцкого государственного университета. Серия F: Строительство. Прикладные науки. Учреждение образования «Полоцкий государственный университет» (Новополоцк). 2012. №8. С. 57-62.

10. Гуткович С. А. Коэффициент извилистости в пористых материалах // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. Алтайский

---



государственный технический университет им. И.И. Ползунова (Барнаул). 2015. №3. С. 293-295.

### References

1. Frants V.V. Problemy nedropol'zovaniya. Institut gornogo dela UrO RAN. 2017. №1 (12). pp. 89-95.
2. Latyshev O.G. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal. Ural'skiy gosudarstvennyy gornyy universitet (Ekaterinburg). 2016. №4. pp. 55-59.
3. Timar G. Quaternary science reviews. Elsevier science publishing company, inc. 2003. №20. pp. 2199-2207.
4. Tukur A. L. Geojournal, Springer Science+Business Media B.V., Formerly Kluwer Academic Publishers B.V. 2002. №2. pp. 93-96.
5. Baklagin V. N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1767](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1767).
6. Vishnevetskiy V.YU. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 chast' 1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1140](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1140).
7. Mel'nik M.A. Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Natsional'nyy issledovatel'skiy tomskiy gosudarstvennyy universitet (Tomsk). 2010. №335. pp. 168-176.
8. Sandulyak D.A., Sandulyak A.A., Ershova V.A., Sandulyak A.V., Kononov M.A. Steklo i keramika. "Lad'ya" (Moskva). 2016. №9. pp. 28-31.
9. Nikitin V.I., Kofanov V.A. Vestnik polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya F: Stroitel'stvo. Prikladnyye nauki. Uchrezhdeniye obrazovaniya «Polotskiy gosudarstvennyy universitet» (Novopolotsk). 2012. №8. pp. 57-62.
10. Gutkovich S. A. Fundamental'nyye problemy sovremennogo materialovedeniya. Altayskiy gosudarstvennyy tekhnicheskij universitet im. I.I. Polzunova (Barnaul). 2015. №3. pp. 293-295.