

## Приближенная математическая модель и конечно-элементная имитация течения воздуха в расширяющемся усеченном конусе

*Н.Н. Азимова, В.В. Бараниченко, М.В. Бедоидзе, А.С. Ермаков,*

*Д.С. Цымбалов*

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** Предложен оригинальный подход к описанию течения воздуха в тонком коническом диффузоре. Он основан на приближенном аналитическом решении уравнения неразрывности. Кроме того, объединена упрощенная модель турбулентности. Достоверность полученной формулы подтверждается сравнением с конечно-элементным решением для разработанной экспериментальной установки. Разработка предназначена для непосредственного компьютерного моделирования многофазного течения.

**Ключевые слова:** пылевоздушная смесь, аспирационные системы, турбулентность, конечно-элементное моделирование, сепарационный диффузор.

Изучение динамики пылевоздушных смесей крайне актуально для проектирования аспирационных систем [1]. Чрезвычайная сложность и многофакторность процесса требует корректного выделения ведущих эффектов и связей при конструировании соответствующих информационных моделей. Определить значимость влияния того или иного фактора на структуру многофазного потока позволяет лишь специально спланированный эксперимент. Ниже предлагается приближенное аналитическое описание течения в вертикально ориентированном сепарационном диффузоре (рис. 1), предназначенном для непосредственного визуального наблюдения динамики частиц с известными геометрическими и массовыми характеристиками. Выбор такой конструкции обусловлен множеством подходов к решению поставленной задачи, начиная от 2D-проекции и заканчивая сложным многоуровневым экспериментом и компьютерной 3D симуляцией, с дальнейшим сопоставлением полученных результатов.

Удобным способом описать движение пылевоздушной смеси является комбинирование моделей сплошной среды для несущего потока и ньютоновской динамики для увлекаемых им частиц.

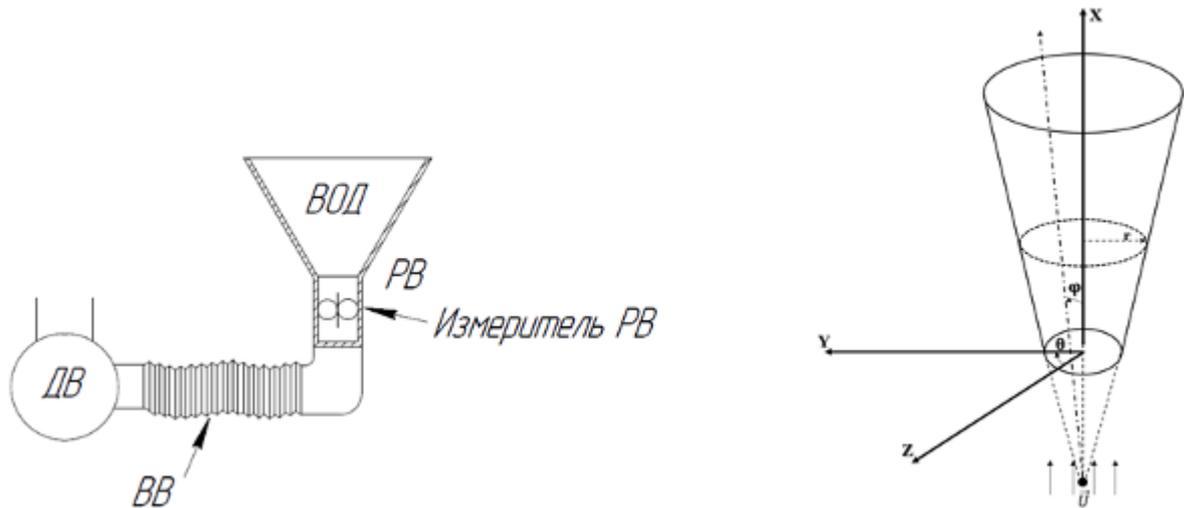


Рис. 1. – Схема установки по разделению полидисперсных сыпучих сред. Слева – конструкция экспериментальной установки: ВОД – вертикально ориентированный диффузор; РВ – расходомер воздуха; ВВ – воздуховод; ДВ – дутьевой вентилятор. Справа – использованные в математической модели декартова и сферическая системы координат.

Поскольку непосредственное наблюдение левитации модельных частиц в установке рис. 1 выявило неадекватность упрощенной двумерной модели течения [2], в частности, важную, не учтенную роль неоднородности трехмерного скоростного поля с большими градиентами у стенок, главным направлением исследований нами выбран учет этих факторов в усовершенствованном математическом описании [3]. Его основу составляют уравнения сплошности, движения и сохранения энергии применительно к потоку [4,5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \rho U^2 = -\nabla p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{U^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left( \rho \mathbf{U} \left( \frac{U^2}{2} + \omega \right) \right) = 0, \quad (3)$$

В этих уравнения независимыми переменными служат пространственная координата  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  и время  $t$ , а искомыми функциями – векторное поле скорости  $\mathbf{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , а также скалярные поля давления  $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  и плотности  $\rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . В уравнении (1.3) фигурируют также дополнительные переменные  $\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \cdot T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – удельная внутренняя энергия воздуха,  $c = 20.8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – его теплоёмкость (при постоянном объёме),  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – абсолютная температура;  $\omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$  – локальная тепловая функция.

Так как четыре искомые функции  $\mathbf{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  связаны лишь тремя уравнениями (1) - (3), однозначно определить их можно лишь задав дополнительную жесткую связь. Таковой для воздуха, как и прочих газов при умеренных давлениях, выступает уравнение состояния Менделеева – Клапейрона:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\rho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\mu} RT \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

где  $\mu = 0.029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  – молярная масса воздуха,  $R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – универсальная газовая постоянная.

Для адаптации общей модели (1) - (4) к условиям вертикально ориентированного диффузора (далее ВОД) рассмотрим его конструкцию и

особенности функционирования. ВОД представляет собой усеченный конус из прозрачного пластика, ось которого направлена по гравитационному полю Земли, а малое открытое основание (через него поступает воздух от дутьевого вентилятора - ДВ) расположено снизу (см. рис. 1). Нагнетаемый в ВОД воздух, затормаживаясь вследствие увеличения сечения, истекает через верхнее открытое основание. Система, очевидно осесимметрична, чем обуславливается рациональность сокращения числа независимых пространственных переменных до двух:  $x$  – осевая и  $r$  – радиальная. Наряду с этим обстоятельством, упрощающим модель, следует учесть, что ВОД предполагает стационарный режим работы (т.е. поля скорости, давления и плотности не меняются со временем), и, следовательно, из (1) - (3) исключаются все производные по времени. Также не предполагается использовать ВОД в около- и сверхзвуковых режимах, что позволяет пренебречь передачей кинетической энергии в тепловую и соответствующим изменением плотности. В результате исключается переменная  $\rho\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right)$ ,

полагаемая  $\rho\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right) = \text{const}$  и соответственно уравнение энергопреобразования (3).

В целях удобства введем соответствие между естественной для конуса сферической системой координат и декартовой, которая обеспечивает симметричную запись уравнений движения Ньютона [6]. Удобно совместить начало обеих систем в вершине нашего усеченного конуса, линейную ось сферической системы выбрать сонаправленной оси абсцисс декартовой системы координат (далее ДСК), ось ординат ДСК направить как показано на рис. 1, а ось аппликат - так, чтобы образовалась правая тройка векторов  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Соответственно направления широтного  $\varphi$  и азимутального  $\theta$  углов отсчитываются от  $x$  к  $y$  в плоскости  $xOy$  и от  $y$  к  $z$  в плоскости  $yOz$ , соответственно. В результате координаты каждой точки можно выразить

двойко – как  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , либо как  $\begin{pmatrix} R \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$ , а между наборами координатных

переменных существует связь  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} R \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$  (см. рис. 1):

$$x = R \cdot \cos \varphi,$$

$$y = R \cdot \sin \varphi \sin \theta, \quad (5)$$

$$z = R \cdot \sin \varphi \cos \theta.$$

Обратным к преобразованию координат служит:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad (6)$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z < 0 \end{cases}$$

Вырезаемая конусом часть пространства задается границами, достижение которых пылевыми частицами сопровождается перечисленными ниже актами:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R_{\min}^2 - \text{проваливание вниз},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq R_{\max}^2 - \text{вылет вверх}, \quad (7)$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \geq \varphi_{\max} - \text{удар в боковую стенку}.$$

Учитывая, что на входе в диффузор при  $R = R_{\min}$  скорость потока максимальна и характеризуется величиной  $|\mathbf{U}_{\max}|$ , из условия несжимаемости газа получаем окончательное распределение осредненной скорости  $\mathbf{U}(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, y, z) = & |\mathbf{U}(R_{\min})| \cdot \frac{R_{\min}^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \left( 1 + \frac{2}{2 + 8 \cdot e^{-\frac{2222}{\operatorname{Re}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}}} \right) \cdot \\ & \cdot \left( 1 - \frac{\left( \arcsin \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right)^{2 + 8 \cdot e^{-\frac{2222}{\operatorname{Re}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}}}}{\Phi_{\max}} \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \sin \left[ \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z < 0 \end{cases} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos \left[ \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{z}, z < 0 \end{cases} \right] \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Турбулентность течения в имитационной модели предлагается учесть путем добавки случайной составляющей ежемоментно в каждой точке. Величину такой случайной составляющей предполагается подобрать, чтобы удовлетворять условиям параллельно выполняемого физического эксперимента, с одной стороны, и увязывая со значением локального числа  $\operatorname{Re}$ , с другой.

Результаты расчета скоростного поля в ВОД с геометрическими размерами, соответствующими лабораторной конструкции рис. 1, приведены на рис. 2.

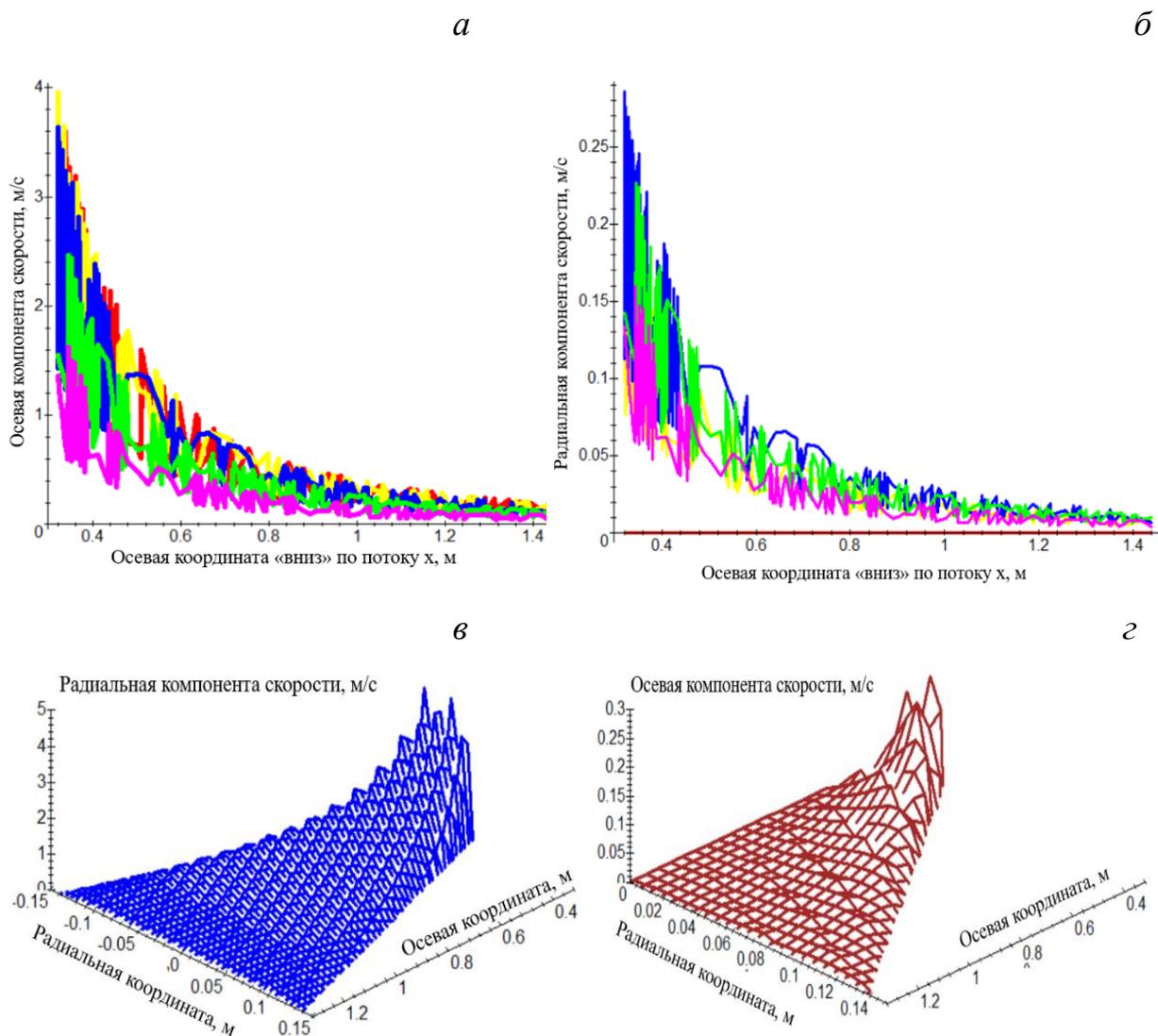


Рис. 2. – Распределение осевой (а, в) и радиальной (б, г) компонент скорости вдоль оси диффузора: реальная вязкость, турбулентность учтена, отдельные линии соответствуют удаленности от оси  $\varphi$ :  $\varphi = 0$  (осевая линия) –

красная кривая;  $\varphi = \frac{\varphi_{\max}}{2}$  – желтая;  $\frac{3 \cdot \varphi_{\max}}{4}$  – синяя;  $\frac{7 \cdot \varphi_{\max}}{7}$  – зеленая;

$\frac{15 \cdot \varphi_{\max}}{16}$  – фиолетовая

Для проверки решения (8) применительно к параметрам лабораторной установки, отображенного на рис. 2, в среде Ansys создана 3D-модель и

сгенерирована расчетная сетка согласно рис. 3. Полученное в результате численного конечно-элементного интегрирования уравнений (1) – (3) поле скоростей  $U(x, y, z)$  показано на рис. 4. Непосредственное сопоставление данных рис. 2 и рис. 4 свидетельствует о надежности выведенной в данной работе приближенной формулы (8). Ее преимуществом перед численным решением рис. 4 является легкая «встраиваемость» в комбинированную Эйлер – Ньютоновскую модель движения пылевоздушной смеси [7-9].

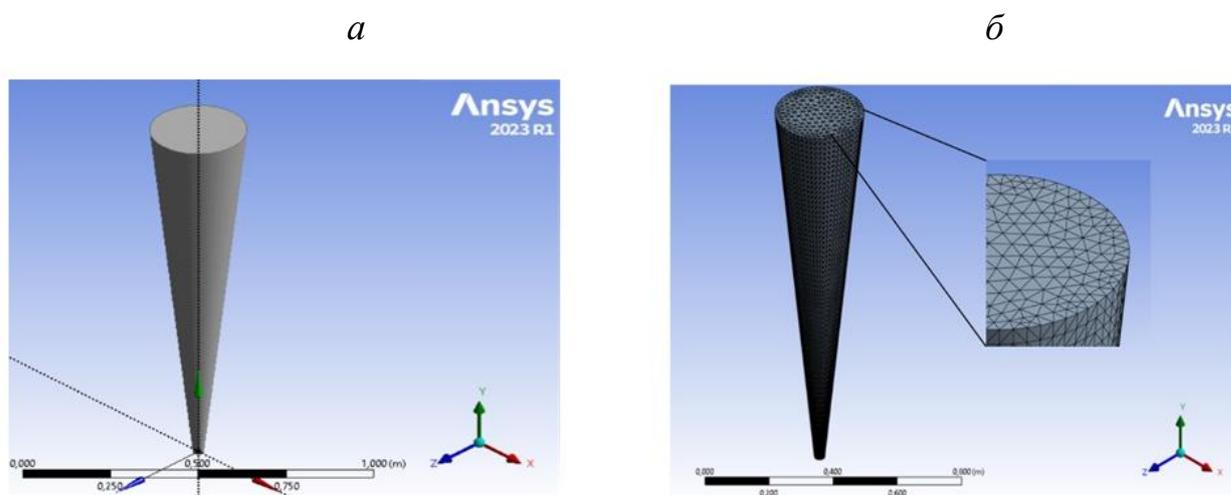


Рис. 3. – 3D-модель (а) и конечно-элементная дискретизация полости (б)  
ВОД в Ansys

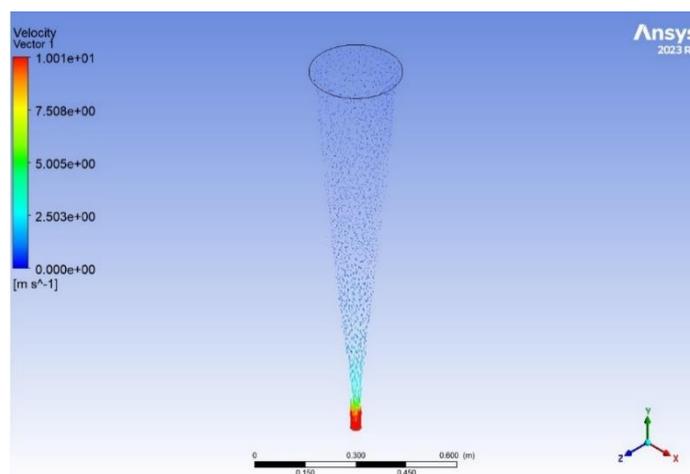


Рис. 4. – Результаты компьютерной имитации течения в диффузоре средствами Ansys. Условия расчета: длина усеченного конуса – 1300 мм; внешний диаметр 306 мм; течение турбулентное

Если считать пылевые частицы (из вещества плотности  $\rho$ ) имеющими форму близкую к правильной и характеризуемую линейными размерами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , можно составить уравнение их движения в воздушном потоке. Для простоты положим объем частиц равным  $V = a \cdot b \cdot c$ , а площадь граней

$$S = \begin{cases} a \cdot b \\ b \cdot c \\ c \cdot a \end{cases}. \text{ Попав в гравитационное поле, характеризуемое вектором } \mathbf{g}, \text{ и}$$

одновременно в поток воздуха с полем скорости  $\mathbf{U}(\mathbf{K}(t))$ , частица вовлекается в движение согласно одному из законов Ньютона. Здесь

использовано обозначение  $\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t)$  для мгновенного положения

частицы [10-12]. В рамках выбранной модели математическая формулировка уравнения Ньютоновской динамики для каждой отдельной частицы дается векторным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2\mathbf{K}(t)}{dt^2} = -\mathbf{g} - \frac{\varepsilon_1}{\rho(a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{3}}} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \left| \frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{K}(t)) \right| \right] \cdot \left( \frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} - \mathbf{U}(\mathbf{K}(t)) \right). \quad (9)$$

Численное интегрирование (9) не сопряжено с принципиальными трудностями и ограничивается лишь числом одновременно рассматриваемых объектов. Опыт работы с 2D-моделью [2] показал, что интерпретирующие системы типа Python позволяют изучать динамику максимум двух десятков частиц. Соответственно внесенное здесь уточнение модели потока повысит реалистичность имитации, но потребует использовать компиляторы типа Fortran.

### Заключение

Предложена и успешно протестирована математическая модель течения воздуха в ВОД. Модель учитывает погранслои и турбулентность. Выражаемая явными аналитическими зависимостями, она удобна для встраивания в программные комплексы.

## Литература

1. Orme M., Leksmono N. Ventilation Modeling Data Guide. Document AIC-GUI 05. ISBN 2 9600355 2 6. 2002. 80 p.
2. Азимова Н.Н., Бараниченко В.В., Бедоидзе М.В., Ермаков А.С., Цымбалов Д.С. Компьютерная программа «Имитационное моделирование 2D-динамики пылевоздушной смеси в вертикально ориентированном диффузоре» / Св-во о регистрации эл. ресурса №25090 ОФЭРНиО. — Хроники Объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование». 2022. № 12 URL:[ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2022/12.pdf](http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2022/12.pdf)
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.-Л., Гостехиздат, 1950. — 676 с.
4. Басс В. П. Молекулярная газовая динамика и её приложения в ракетно-космической технике. — К.: Наукова думка, 2008. — 272 с.
5. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэродинамике и тепломассообмене. — К.: Наукова Думка, 2003. — 379 с. 6. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
7. Rosin P., Rammler E. The Laws Governing the Fineness of Powdered Coal // Journal of the Institute of Fuel. 1933. V. 7. pp. 29–36.
8. Seo Hyukki, Hwang Kyeongmo, Choi Cheongyeol. Ansys fluent user's guide. URL: [fluid.tuwien.ac.at/322057?action=AttachFile&do=get&target=flu\\_ug.pdf](http://fluid.tuwien.ac.at/322057?action=AttachFile&do=get&target=flu_ug.pdf).
9. Matsson Ph.D., P.E., John E. An Introduction to ANSYS Fluent 2022 // SDC Publications, 2022. 688 с. – ISBN 978-1-63057-569-4.
10. Lee Huei-Huang. Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 2020 // Taylor&Francis, 2021. 600 с. – ISBN 978-1-63057-456-7.
11. Лаптев А.Г., Фарахов М.И. Разделение гетерогенных систем в насадочных аппаратах. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 342 с. – ISBN 5-89-873-186-5

12. Qian Jing, Tavakoli Behtash, Goldasteh Iman, Ahmadi Goodarz, Ferro Andrea. Building removal of particulate pollutant plume during outdoor resuspension event // Building and Environment. 2014. №75. С. 161-169.

### References

1. Orme M., Leksmono N. Ventilation Modeling Data Guide. Document AIC-GUI 05. ISBN 2 9600355 2 6. 2002. 80 p.

2. Azimova N.N., Baranichenko V.V., Bedoidze M.V. i dr. Komp'yuternaja programma «Imitacionnoe modelirovanie 2D-dinamiki pylevozdušnoj smesi v vertikal'no orientirovannom diffuzore» [Computer program «Simulation of 2D Dynamics of Dust-Air Mixture in a Vertically Oriented Diffuser»]. Sv-vo o registracii jel. resursa №25090 OFJeRNiO. Khroniki Ob"yedinennogo fonda elektronnykh resursov «Nauka i obrazovaniye». 2022. № 12 URL:ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2022/12.pdf.

3. Lojczjanskij L. G. Mehanika zhidkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]. M. L., Gostehizdat, 1950, 676 p.

4. Bass V. P. Molekuljarnaja gazovaja dinamika i ejo prilozhenija v raketno-kosmicheskoj tehnikе [Molecular gas dynamics and its applications in rocket and space technology]. K.: Naukova dumka, 2008. 272 p. ISBN 978-966-00-0746- 8.

5. Prihod'ko A. A. Komp'yuternye tehnologii v ajerodinamike i teplo-massoobmene [Computer technologies in aerodynamics and heat and mass transfer]. K.: Naukova Dumka, 2003, 379 p. ISBN 966-00-0047-2

6. Nigmatulin R. I. Osnovy mehaniki geterogennyh sred [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. M.: Nauka, 1978, 336 p.

7. Rosin, P. & Rammler, E. The Laws Governing the Fineness of Powdered Coal. Journal of the Institute of Fuel. 1933. V. 7. pp. 29–36.

8. Seo Hyukki, Hwang Kyeongmo, Choi Cheongyeol. Ansys fluent user's guide. URL: fluid.tuwien.ac.at/322057?action=AttachFile&do=get&target=flu\_ug.pdf



9. Matsson Ph.D., P.E., John E. An Introduction to ANSYS Fluent 2022. SDC Publications, 2022. 688 p. ISBN 978-1-63057-569-4.

10. Lee Huei-Huang. Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 2020 Taylor&Francis, 2021. 600 p. ISBN 978-1-63057-456-7.

11. Laptev A.G., Farahov M.I., Razdelenie geterogennyh sistem v nasadochnyh apparatah [Separation of heterogeneous systems in packed apparatus]. Kazan': Kazan. gos. jenerg. un-t, 2006. 342 p. ISBN 5-89-873-186-5

12. Qian Jing, Tavakoli Behtash, Goldasteh Iman, Ahmadi Goodarz, Ferro Andrea. Building and Environment, 2014, №75. pp. 161-169.

**Дата поступления: 22.8.2023**

**Дата публикации: 8.12.2023**