
Энергетические характеристики распространения звуковых волн в неоднородном морском волноводе

*Ю.И. Папкова, С.О. Папков, В.А. Лисютин, О.Р. Ластовенко, Деркач
М.И., Ольшанская И.В.*

Севастопольский государственный университет, Севастополь

Аннотация: Для модели морского акустического волновода с твердым ступенчатым дном и меняющимся с глубиной профилем скорости звука строится аналитическое представление потенциала скорости точечного источника звука. Неоднородность дна в форме цилиндрического выступа моделируется на основе метода частичных областей. Для построения потенциала скорости звука в каждой частичной области используется представление поля в виде суммы нормальных мод. Сшивка решений на границе частичных областей приводит к бесконечной системе линейных уравнений относительно коэффициентов при нормальных модах. В работе получены формулы, описывающие энергетические характеристики распространения каждой из нормальных мод по трассе волновода. Приводятся примеры численного моделирования. Дается анализ коэффициентов возбуждения нормальных мод для параметров волновода, характерных для черноморского региона.

Ключевые слова: волновод, нормальные моды, неоднородность дна, коэффициент возбуждения, частичные области, бесконечная система линейных уравнений, асимптотика.

Введение

В настоящее время теория плоскостойких волноводов является общепризнанной моделью для описания распространения звука в природных морских волноводах [1–3]. Моделирование звуковых полей в рамках данной теории находит свое экспериментальное подтверждение в широком диапазоне частот, и дает возможность для решения прикладных задач технического характера [4, 5]. Как правило, классическая модель природного морского волновода представляет собой водный слой с плоскопараллельными границами, лежащий на слое (полупространстве) осадков. Подобная модель позволяет адекватно описать большинство физических эффектов, возникающих при волноводном распространении звука, однако при существенной геометрической неоднородности донного рельефа неприменима. В этом случае используются численные методы,

имеющие свои ограничения при описании особенностей звуковых полей, при анализе волноводного распространения на больших расстояниях.

В работах авторов [6,7] был предложен метод построения аналитического решения для волноводов с неровным дном, с помощью которого соответствующие краевые задачи сводятся к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Наличие изломов, угловых точек и ребер границ волноводов позволяет эффективно решить бесконечную систему в силу того, что асимптотика неизвестных находится благодаря априорно известному характеру особенности вблизи угла [8]. Аналитическая форма решения, обеспеченная использованием данного подхода, позволяет значительно упростить исследование энергетических характеристик звукового поля.

Целью данной работы является исследование энергетических характеристик прохождения звуковой волны для морского волновода с подводной возвышенностью при параметрах, характерных для черноморского региона. В частности, постараемся ответить на вопрос, как размеры подводной возвышенности меняют коэффициенты возбуждения первых нормальных мод.

Математическая модель

На рис. 1 представлено сечение морского акустического волновода, имеющего подводную возвышенность в форме цилиндрического выступа. Для упрощения модели положим, что задача имеет радиальную симметрию, точечный гармонический источник звука расположен над центром выступа в точке z_0 . Плотность в водном слое положим постоянной и равной ρ , скорость звука полагается стратифицированной по вертикали $c(z)$. В рамках подобной идеализации, волновод представляет собой комбинацию двух цилиндрических областей постоянной глубины. Внутренняя область (А), содержащая источник над подводной возвышенностью, и внешняя (В) – в

которой волноводное распространение звука представляет наибольший интерес.

Как известно, распространение звуковых волн точечного гармонического источника описывается неоднородным уравнением Гельмгольца [9]:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = -\frac{\delta(z-z_0)\delta(r)}{2\pi r}, \quad (1)$$

где Φ – потенциал скоростей; ω – круговая частота; δ – дельта функция Дирака.

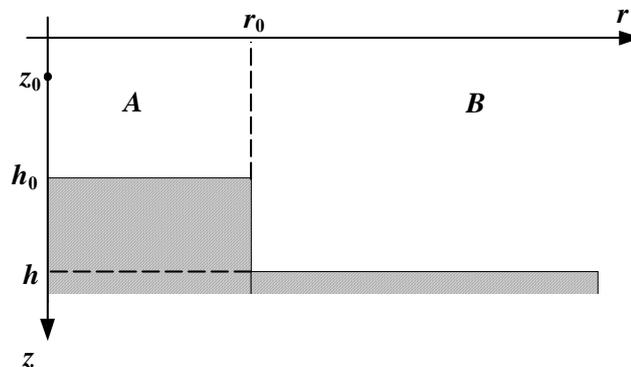


Рис. 1 – Морской акустический волновод с выступом

В качестве краевых условий положим, что поверхность волновода является акустически мягкой, а дно – акустически жестким:

$$\Phi(r,0) = 0; \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_L = 0$$

где L – кривая, определяющая форму дна.

Решение для волновода со ступенчатым дном строится [6] в виде суммы нормальных мод в каждой из частичных областей. Для волновода с одним выступом общее решение имеет следующий вид:

$$\Phi_A = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{\gamma_{A,n}} \varphi_{A,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{A,n} r) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{A,n}(z) J_0(\xi_{A,n} r) \quad (2)$$

$$\Phi_B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_{B,n}(z) H_0^{(1)}(\xi_{B,n} r) \quad (3)$$

где $\gamma_{A,n} = \int_0^{h_0} (\varphi_{A,n}(s))^2 ds$; $\xi_{A,n}$, $\varphi_{A,n}$, $\xi_{B,n}$, $\varphi_{B,n}$ – собственные числа и функции

соответствующих задач Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \varphi_A'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \varphi_A &= 0, \quad \varphi_A(0) = 0, \varphi_A'(h_0) = 0; \\ \varphi_B'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \varphi_B &= 0, \quad \varphi_B(0) = 0, \varphi_B'(h) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм нахождения собственных чисел и аналитического построения собственных функций краевых задач (4) для кусочно-заданного профиля скорости звука $c(z)$ описан в [7].

Использование нормальных мод позволяет выполнить граничные условия на горизонтальных стенках волновода и условие излучения точно. Из условий непрерывности звукового поля на границе раздела $r=r_0$ областей (А) и (В) получаем

$$\Phi_A(r_0, z) = \Phi_B(r_0, z), \quad z \in [0; h_0]; \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial r}(r_0, z) = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_A}{\partial r}(r_0, z), & z \in [0; h_0] \\ 0, & z \in [h_0; h] \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя выражения (2) – (3) в условия (4), и проводя алгебраизацию данных соотношений, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ в представлении потенциала скоростей

$$\begin{cases} -\gamma_{B,m} y_m + \sum_{n=0}^{\infty} (I_{mn}^{(1)} x_n + I_{mn}^{(2)} y_n) + Q_m^{(1)} = 0 \\ -\gamma_{B,m} \frac{H_1^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)}{H_0^{(1)}(\xi_{B,m} r_0)} y_m + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_{A,n} J_1(\xi_{A,n} r_0)}{\xi_{B,m} J_0(\xi_{A,n} r_0)} I_{mn}^{(1)} x_n + Q_m^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

($m = 0, 1, 2, \dots$)

где $x_n = A_n J_0(\xi_{A,n} r_0)$; $y_n = B_n H_0^{(1)}(\xi_{B,n} r_0)$, $\gamma_{B,n} = \int_0^h (\varphi_{B,n}(s))^2 ds$;

$$Q_m^{(1)} = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{\gamma_{A,n}} I_{mn}^{(1)} H_0^{(1)}(\xi_{A,n} r_0); \quad Q_m^{(2)} = \frac{i}{4 \xi_{A,m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{\gamma_{A,n}} I_{mn}^{(1)} \xi_{A,n} H_1^{(1)}(\xi_{A,n} r_0).$$

Заметим, что входящие в данные формулы интегралы

$$I_{mn}^{(1)} = \int_0^{h_0} \varphi_{A,n}(z) \varphi_{B,m}(z) dz; \quad I_{mn}^{(2)} = \int_{h_0}^h \varphi_{B,n}(z) \varphi_{B,m}(z) dz$$

можно вычислить точно интегрированием по частям:

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{\varphi'_{B,m}(h_0) \varphi_{A,n}(h_0)}{\xi_{B,m}^2 - \xi_{A,n}^2}; \quad I_{mn}^{(2)} = \frac{\varphi_{B,m}(h_0) \varphi'_{B,n}(h_0) - \varphi'_{B,m}(h_0) \varphi_{B,n}(h_0)}{\xi_{B,m}^2 - \xi_{B,n}^2} \quad (m \neq n).$$

Поведение неизвестных в бесконечной системе (6) было исследовано в работе [8]. Из условий на ребре волновода найден характер асимптотического поведения неизвестных в бесконечной системе:

$$x_n = \frac{(-1)^n a_0}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad y_n = \frac{b_0 \sin\left(\frac{\pi h_0}{h_1} (n+1/2) - \frac{\pi}{3}\right)}{n^{5/3}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (7)$$

Асимптотический закон (7) позволяет при численном решении системы (6) заменить неизвестные, начиная с некоторого номера N , своими асимптотиками, что при удержании в расчетах первых $(2N + 2)$ уравнений, дает возможность получить конечную систему относительно $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{N-1}, y_{N-1}, a_0, b_0$. Кроме того, асимптотический закон (7) позволяет провести улучшение сходимости рядов для потенциалов (2) – (3) (колебательной скорости) на границах раздела областей (A) и (B). При этом локальная особенность в поведении колебательной скорости вблизи кромки акустически жесткого тела оказывается заключенной в аналитически свернутых остатках рядов, что дает возможность для описания звукового поля в непосредственной близости от ребра.

Энергетические характеристики распространения звука

Формулы аналитического представления потенциалов в рассматриваемом волноводе позволяют исследовать энергетические характеристики распространения звука. Средний поток мощности от источника в области над выступом (A) через сечение $r = r_0$ равен сумме средних потоков каждой из нормальных мод [10]

$$w_A = \frac{\omega\rho}{8} \sum_{n=0}^{N_A} \varphi_{A,n}(z_0) \xi_{A,n} \left(J_1(\xi_{A,n} r_0) Y_0(\xi_{A,n} r_0) - J_0(\xi_{A,n} r_0) Y_1(\xi_{A,n} r_0) \right) \left(\frac{\varphi_{A,n}(z_0)}{4\gamma_{A,n}} + \text{Im } A_n \right) + \frac{\omega\rho}{4\pi} \sum_{n=N_A+1}^{\infty} \varphi_{A,n}(z_0) |\xi_{A,n}| \text{Im } A_n \left(K_0(|\xi_{A,n}| r_0) I_1(|\xi_{A,n}| r_0) + K_1(|\xi_{A,n}| r_0) I_0(|\xi_{A,n}| r_0) \right) \quad (8)$$

где $N_A + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области над выступом; $K_0(z)$, $K_1(z)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

Средний поток мощности области без выступа (B), подводимый через сечение $r = r_0$, есть сумма средних потоков мощности распространяющихся нормальных волн:

$$w_B = \frac{\omega\rho}{2} \sum_{n=0}^{N_B} |B_n|^2 \gamma_{B,n} \xi_{B,n} \left(J_1(\xi_{B,n} r_0) Y_0(\xi_{B,n} r_0) - J_0(\xi_{B,n} r_0) Y_1(\xi_{B,n} r_0) \right) \quad (9)$$

где $N_B + 1$ – число распространяющихся нормальных волн области без выступа.

Очевидно, что согласно закону сохранения энергии должно выполняться

$$w_A = w_B \quad (10)$$

Заметим, что равенство (10) может служить как критерием точности решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (6), так и в целом поставленной выше краевой задачи.

В свою очередь, формулы (8), (9) позволяют провести расчеты потоков энергии в сечении волновода $r=r_0$ для каждой из частичных областей, что дает возможность исследовать трансформацию звуковой волны, прошедшей через зону сопряжения, в нормальные волны области без выступа.

Анализ численных результатов

При численном моделировании на основе представленной модели, полагалось, что параметры волновода равны следующим значениям: $c = 1480$ м/с; $z_0 = 0,1h$, $r_0 = 2h$, $h = 100$ м, $\Omega = 5$ ($\Omega = \omega h/c$ – безразмерная частота). Величина выступа h_0/h варьировалась при фиксированной безразмерной частоте Ω . В таблице №1 приведены коэффициенты возбуждения нормальных волн области без выступа $W_n = \frac{w_{B,n}}{w_A}$ ($n = 0,1,\dots,$

N_B) в зависимости от отношения глубин в частичных областях волновода. При указанных параметрах волновода в области без выступа (B) существуют две распространяющиеся моды. Количество распространяющихся нормальных волн области над выступом (A) зависит от отношения h_0/h и частоты Ω . Для постоянного профиля скорости звука имеется конечное число

$$N_A = \left[\frac{h_0 \Omega}{h \pi} - \frac{1}{2} \right]$$

($[x]$ – целая часть действительного числа x) незатухающих мод, соответствующих вещественным собственным значениям.

Таблица №1

Зависимость коэффициентов возбуждения нормальных волн от h_0/h

h_0/h	0,99	0,95	0,94	0,92	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
W_0	0,09	0,25	0,60	0,96	0,96	0,62	0,33	0,17	0,11	0,08	0,10	0,06
W_1	0,91	0,75	0,40	0,04	0,04	0,38	0,67	0,83	0,89	0,92	0,90	0,94

Из данных таблицы №1 следует, когда параметр h_0/h находится в диапазоне $0,8 \leq h_0/h \leq 0,94$ большую энергию несет нулевая нормальная волна, которая по величине превосходит первую. По мере приближения выступа к границам волновода ($h_0/h > 0,94$ и $h_0/h < 0,8$) пропорционально

увеличивается влияние первой нормальной волны и соответственно снижение нулевой.

Для оценки влияния выступа на прохождение звуковой волны на рис. 2 представлен график изменения величины w_A/w_0 (w_0 – средний поток мощности от источника через сечение $r = r_0$ для идеального волновода глубины h) в зависимости от размеров h_0/h .

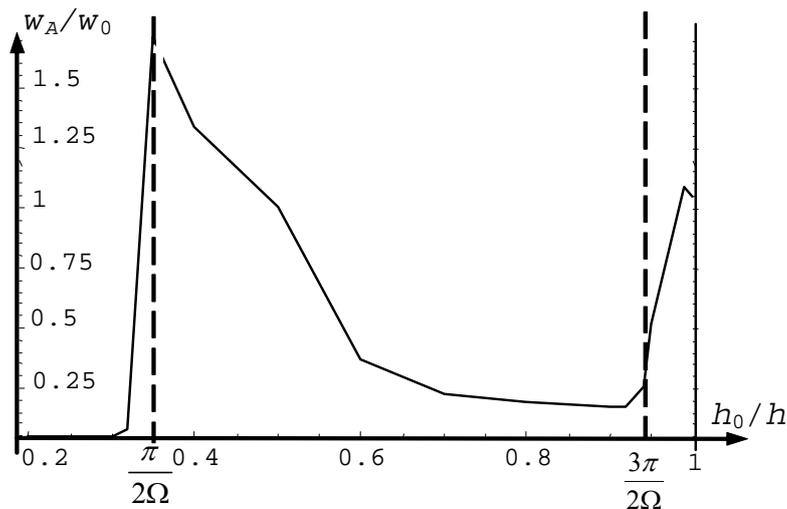


Рис. 2 – Зависимость изменения величины w_A/w_0 от отношения h_0/h

При определенных размерах $\frac{h_0}{h} = \frac{\pi}{2\Omega}$ и $\frac{h_0}{h} = \frac{3\pi}{2\Omega}$ частота распространения звука оказывается резонансной для области над выступом (A). Анализ спектра данной области показал, что при условии $\frac{h_0}{h} < \frac{\pi}{2\Omega}$ существуют только затухающие моды, в случае $\frac{\pi}{2\Omega} < \frac{h_0}{h} < \frac{3\pi}{2\Omega}$ – одна распространяющаяся нормальная волна, когда $\frac{h_0}{h} > \frac{3\pi}{2\Omega}$ – две распространяющихся волны. При этом если в области над выступом присутствуют только затухающие нормальные волны, энергия, подводимая к границе частичных областей, оказывается достаточно малой, а с уменьшением глубины h_0 она практически равна нулю (в случае $h_0/h \leq 0,2$

отношение $w_A/w_0 \approx 10^{-10}$). Таким образом, несмотря на то, что во внешней области волновода всегда существуют две распространяющиеся моды, можно говорить об эффекте «запирания» волновода. Из рис. 2 также следует, что добавление распространяющейся моды в области (А) приводит к увеличению w_A/w_0 .

Выводы

Обеспеченная предлагаемым подходом аналитическая форма решения задачи о звуковом поле точечного источника в гидроакустическом волноводе с выступом дает возможность получить аналитические формулы для энергетических характеристик звукового поля. Численная проверка закона сохранения энергии на границе раздела частичных областей свидетельствует о точности вычислений. Исследование характеристик звукового поля позволяет сделать вывод о сложной зависимости излучаемой энергии от параметров задачи, за исключением случая малых размеров выступа, здесь наблюдаются небольшие вариации энергетических характеристик по сравнению с волноводом с плоскопараллельными границами.

Развитые в работе теоретические методы имеют общий характер и могут быть использованы для решения других задач подводной акустики, в частности, для расчета волноводов с неровным дном, имеющих локальные неоднородности в виде акустически жестких, импедансных или упругих тел помещенных внутрь волновода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополь в рамках научного проекта № 18-42-920001.

Литература

1. Bevans D. A., Buckingham M.J. Estimating the sound speed of a shallow-water marine sediment from the head wave excited by a low-flying helicopter // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 142. № 4. pp. 2273 – 2287.

2. Wan. L, Badiy M., Knobles D.P. Geoacoustic inversion using low frequency broadband measurements from L-shaped arrays in the Shallow Water 2006 Experiment // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. № 4. pp. 2358 – 2373.

3. Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B, Schmidt H. Computational Ocean Acoustics. – N. – Y.: AIP Press, 1994. 578 p.

4. Воронин В.А., Пивнев П.П., Тарасов С.П. Широкополосные гидроакустические антенны систем экологического мониторинга водной среды и придонных осадочных пород // Инженерный вестник Дона, 2015, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2015/3476.

5. Каевицер В.И., Пивнев П.П., Тарасов С.П., Элбакидзе А.В. Гидроакустическая система со сложными сигналами для связи и позиционирования подводных аппаратов // Инженерный вестник Дона, 2019, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5597.

6. Papkova Yu. I. Simulation of the Lower boundary of Acoustic Waveguide // Acoustical Physics. – 2015, №1. – Pleiades Publishing Ltd. –pp. 64-71.

7. Papkova Yu. I. Sound Field in a Hydroacoustic Waveguide with an Uneven Hard Bottom // Acoustical Physics. – 2017, № 1, pp. 54 – 62.

8. Papkova Yu. I. Calculation of the Sound Field in an Inhomogeneous Layered Hydro – Acoustic Waveguide with a Stepped Bottom // Mathematical Models and Computer Simulations – 2016, T.8, C. 671 – 679.

9. Brekhovskikh L. Waves in layered media. – Academic Press, 1980. 520p.

10. Tolstoy I., Clay C.S. Ocean acoustics. – Acoustical Society of America, 1987. 381 p.

References

1. Bevans D. A., Buckingham M.J. J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 142. № 4. pp. 2273 – 2287.

2. Wan. L, Badiy M., Knobles D.P. J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 140. № 4. pp. 2358 – 2373.

3. Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B, Schmidt H. Computational Ocean Acoustics. N. Y.: AIP Press, 1994. 578 p.
4. Voronin V.A., Pivnev P.P., Tarasov S.P. Inzenernyj vestnik Dona, 2015, №4 (part 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2015/3476
5. Kayevitser V.I., Pivnev P.P., Tarasov S.P., Elbakidze A.V. Inzenernyj vestnik Dona, 2015, №4 (part 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5597.
6. Papkova Yu. I. Acoustical Physics. 2015, №1. Pleiades Publishing Ltd. pp. 64-71.
7. Papkova Yu. I. Acoustical Physics. 2017, № 1, pp. 54 – 62.
8. Papkova Yu. I. Mathematical Models and Computer Simulations. 2016, T.8, pp. 671 – 679.
9. Brekhovskikh L. Waves in layered media. Academic Press, 1980. 520p.
10. Tolstoy I., Clay C.S. Ocean acoustics. Acoustical Society of America, 1987. 381 p.