

Численный расчет балок прямоугольного поперечного сечения на устойчивость плоской формы изгиба

А.С. Чепурненко, В.В. Ульянская, Д.А. Высоковский, И.М. Зотов

Донской государственный технический университет

Аннотация: Рассматривается задача устойчивости плоской формы изгиба деревянной балки постоянного прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета. Приводится дифференциальное уравнение для случаев приложения силы не в центре тяжести сечения. Решение уравнения производится численно методом конечных разностей. Для случая приложения нагрузки в центре тяжести задача сводится к обобщенному вековому уравнению. В других случаях используется разработанный авторами итерационный алгоритм, реализованный в пакете Matlab. Получена зависимость между величиной критической силы и положением точки приложения нагрузки. Для указанной зависимости подобрана линейная аппроксимирующая функция. Выполнено сравнение результатов, полученных авторами, с аналитическим решением при помощи функций Бесселя.

Ключевые слова: устойчивость плоской формы изгиба, вековое уравнение, метод конечных разностей, итерационный процесс.

Оптимальными с точки зрения расхода материала являются балки с максимальным отношением высоты к ширине, откуда вытекает необходимость расчёта на устойчивость плоской формы изгиба [1-4].

Критические нагрузки в задачах устойчивости плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения определяются из дифференциального уравнения вида [5,6]:

$$GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{M_y^2}{EI_z} \theta = 0, \quad (1)$$

где G – модуль сдвига, I_k – момент инерции при кручении, I_z – осевой момент инерции M_y – изгибающий момент, θ – угол закручивания.

Уравнение (1) записано для случая приложения нагрузки в центре тяжести поперечного сечения. В настоящей статье будет рассмотрена деревянная шарнирно-опертая по концам балка, с сосредоточенной силой F , приложенной в середине пролета (рисунок 1).

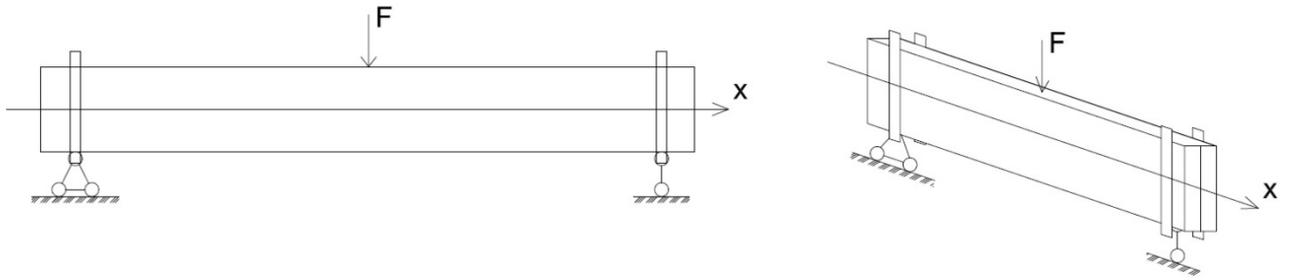


Рис. 1. – Расчетная схема

В диссертации А.А. Карамышевой [7] приводится дифференциальное уравнение, в котором учитывается положение точки приложения нагрузки и переменная жесткость балки:

$$GI_K \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_K)}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \left(qa + \frac{M_y^2}{EI_z} \right) \theta = 0, \quad (2)$$

где a – расстояние от центра тяжести до места приложения нагрузки.

Так как рассматриваемая в данной статье балка имеет постоянное поперечное сечение по всей длине, то второе слагаемое в уравнении (2) обращается в нуль.

Изгибающий момент будет определяться по двум формулам, в зависимости от величины x :

$$M_y = \frac{Fl}{2}x, \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad (3)$$
$$M_y = \frac{Fl}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq l$$

Введем безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$ и безразмерные величины

$$\lambda = \frac{F^2 l^4}{GI_K EI_z}, \quad \alpha = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_K}},$$

Тогда выражения (3) примут вид:

$$M_y = \frac{Fl}{2} \xi, \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq 0,5,$$
$$M_y = \frac{Fl}{2} (1 - \xi), \quad \text{при } 0,5 \leq \xi \leq 1,$$

Переход от сосредоточенной силы к равномерно распределенной нагрузке выполняется по формуле:

$$q = \frac{F}{\Delta x} = \frac{F}{l\Delta\xi}.$$

Уравнение (2) для узла, в котором приложена сосредоточенная сила представляется в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(\sqrt{\lambda} \frac{\alpha}{\Delta\xi} + \lambda f(\xi) \right) \theta = 0, \quad (4)$$

где

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi^2}{4}, & \text{при } 0 \leq \xi \leq 0,5 \\ \frac{(1-\xi)^2}{4}, & \text{при } 0,5 \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Для остальных точек балки разрешающее уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \lambda f(\xi) \theta = 0. \quad (5)$$

Угол закручивания в начальной и конечной точках равен нулю, т.е. граничные условия имеют вид: $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$.

Решение выполняется численно при помощи метода конечных разностей [8]. Отрезок $\xi \in [0;1]$ разбивается на n шагов $\Delta\xi$. Разностная аппроксимация дифференциального уравнения (4) записывается следующим образом [9]:

$$\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta\xi^2} + \sqrt{\lambda} \frac{\alpha}{\Delta\xi} + \lambda f(\xi_i) \theta_i = 0 \quad (6)$$

Составив уравнение (6) для центрального узла сетки, а также аппроксимировав уравнение (5) для остальных внутренних узлов сетки, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left([A] + \sqrt{\lambda} \frac{\alpha}{\Delta\xi} [C] + \lambda [B] \right) \{X\} = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{\Delta\xi^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} f(\xi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\xi_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\xi_n) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dots \\ \theta_n \end{Bmatrix}.$$

Уравнение (6) имеет ненулевое решение при определителе, равном нулю. Таким образом,

$$\left| [A] + \sqrt{\lambda} \frac{\alpha}{\Delta\xi} [C] + \lambda [B] \right| = 0 \quad (8)$$

В случае приложения нагрузки в центре тяжести коэффициент α равен нулю, и уравнение (7) принимает вид обобщенного векового уравнения. Первая критическая нагрузка соответствует минимальному из собственных значений λ . Критическая нагрузка вычисляется по следующей формуле:

$$F_{кр} = \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{GI_k EI_z}}{l^2} = K \frac{\sqrt{GI_k EI_z}}{l^2}$$

При $\alpha = 0$ коэффициент K равен 16.94, и ему соответствует собственное значение $\lambda = 286.96$. При $\alpha \neq 0$ уравнение (8) не будет являться обобщенным вековым уравнением, поэтому для расчета был разработан итерационный процесс.

В первом приближении вместо уравнения (8) решается вековое уравнение, имеющее вид:

$$\left| [A_1] + \lambda [B] \right| = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } [A_1] = \left| [A] + \sqrt{\lambda_1} \frac{\alpha}{\Delta\xi} [C] \right|, \quad \lambda_1 = 286.96.$$

В результате получим минимальное собственное значение λ'_1 . Во втором приближении в матрицу $[A_1]$ вместо λ_1 подставляем $\lambda_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda'_1}{2}$.

Итерационный процесс будет остановлен при условии:

$$\frac{|\lambda_i - \lambda'_i|}{\lambda_i} \cdot 100\% < \varepsilon, \quad (10)$$

где ε – погрешность, выражаемая в процентах.

Представленный итерационный процесс был реализован в пакете Matlab. В итоге был получен график зависимости коэффициента K от положения точки приложения силы (α) (рисунок 2). Данный график показывает, что в случае приложения силы над центром тяжести ее критическая величина снижается, а если нагрузка приложена под центром тяжести, то ее критическая величина возрастает.

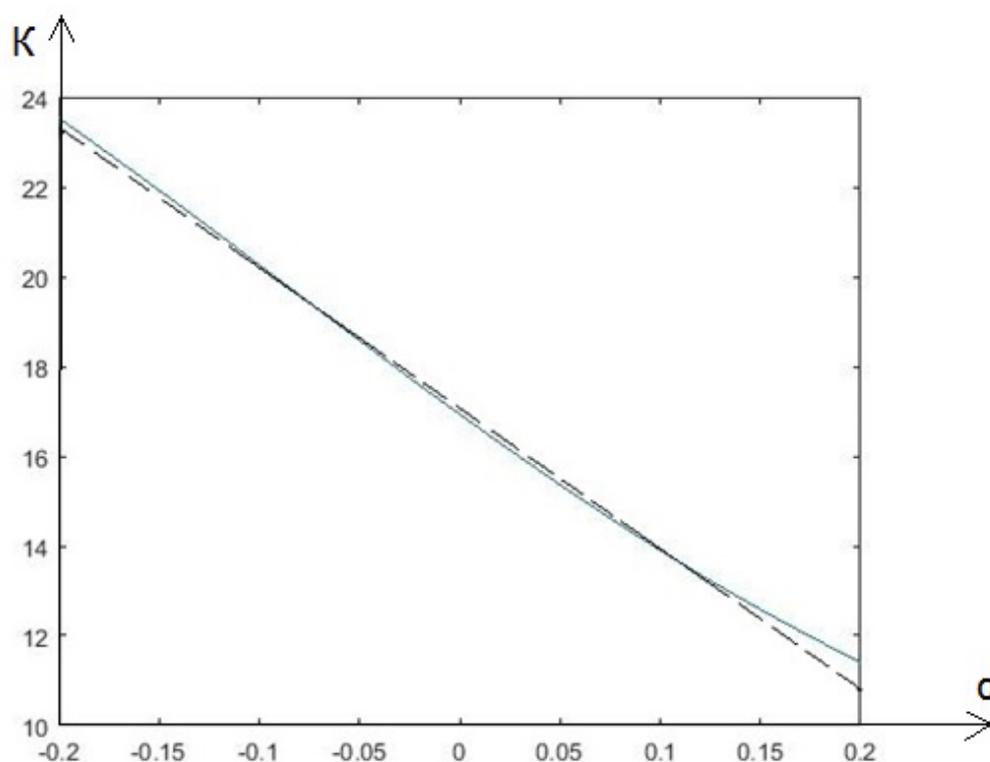


Рис. 2. – График зависимости $K(\alpha)$

В нормах проектирования деревянных конструкций (СП 64.13330.2017. Деревянные конструкции) положение точки приложения силы не учитывается. Нами предлагается ввести поправочный коэффициент $K_n = \frac{K}{K_0}$, где величина $K_0 = 16,94$ соответствует приложению нагрузки в центре тяжести. В программе Microsoft Excel для зависимости $K_n(\alpha)$ была подобрана линейная аппроксимирующая функция, имеющая вид:

$$K_n = 1 - 1.831\alpha. \quad (11)$$

Соответствующая формуле (11) кривая $K(\alpha)$ представлена на рис. 2 штриховой линией.

Произведено сравнение результатов, полученных нами при помощи итерационного алгоритма, с аналитическим решением А.С. Вольмира [10] на основе функций Бесселя (табл. 1).

Таблица №1

Над центром тяжести							
α	0	0,03	0,143	0,293	0,544		
K (Авторы)	16,94	15,9857	12,7765	9,6056	6,3512		
K (Вольмир)	16,94	16,0	12,8	9,6	6,4		
Под центром тяжести							
α	0	-0,069	-0,166	-0,271	-0,396	-0,562	-0,815
K (авторы)	16,94	19,2151	22,3576	25,5395	28,7354	31,9455	35,1239
K (Вольмир)	16,94	19,2	22,4	25,6	28,8	32,0	35,2

Совпадение результатов свидетельствует об их достоверности.

Литература

1. Карамышева А.А., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Языева С.Б. Оптимизация геометрических параметров двухскатной балки прямоугольного сечения // Инженерный вестник Дона. 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_55_karamysheva.pdf_9eaad3038e.pdf
 2. Карамышева А.А., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Языева С.Б. Оптимизация формы ступенчато-призматической балки при изгибе // Инженерный вестник Дона. 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_54_karamysheva.pdf_dff7f7bf1a.pdf
 3. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1961, second edition, 541 p.
 4. Karamysheva A.A., Yazyev S.B., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with stiffness. ICIE, 2016, pp. 1872-1877.
 5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984 с.
 6. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Л., М.: Гостехиздат, 1946, 535 с.
 7. Карамышева, А. А. Совершенствование расчета на устойчивость плоской формы изгиба деревянных балок переменного сечения и их оптимизация: дис. ... канд. техн. Ростов-на-Дону, 2016, 124 с.
 8. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977, 154 с.
 9. Sorin Micu, Ionel Roventă, Laurențiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL: researchgate.net/publication/294736245_Approximation_of_the_controls_for_the_linear_beam_equation
 10. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963, 879 с.
-

References

1. Karamysheva A.A., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Yazyeva S.B. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_55_karamysheva.pdf_9eaa3038e.pdf
2. Karamysheva A.A., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Yazyeva S.B. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2015. №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_54_karamysheva.pdf_dff7f7bf1a.pdf
3. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1961, second edition, 541 p.
4. Karamysheva A.A., Yazyev S.B., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with stiffness. ICIE, 2016, pp. 1872-1877.
5. Vol'mir A. S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967, 984 p.
6. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh system [Stability of elastic systems]. L., Moscow: Gostekhizdat, 1946, 535 p.
7. Karamysheva, A. A. Sovershenstvovanie rascheta na ustoychivost' ploskoy formy izgiba derevyannykh balok peremennogo secheniya i ikh optimizatsiya: dis. ... kand. tekhn. [Improvement of the stability of the flat form of the bending of the beam of variable cross-section beams calculation and their optimization]. Rostov-na-Donu, 2016, 124 p.
8. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachakh rascheta stroitel'nykh konstruktsiy [The method of grids in the problems of calculating building structures]. Moscow: Stroyizdat, 1977, 154 p.
9. Sorin Micu, Ionel Roventă, Laurențiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL: researchgate.net/publication/294736245_Approximation_of_the_controls_for_the_linear_beam_equation



10. Vol'mir A.S. Ustoychivost' uprugikh system [Stability of elastic systems].
Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963,
879 p.