

## Предельное состояние вращающегося диска

*В. В. Акиншин, В. Э. Колодяжный, А. Е. Найденов, Н. С. Скорняков*

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация:** В приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о быстровращающемся диске, испытывающем боковое давление. В рамках модели идеального жесткопластического тела и условия пластичности Мизеса определены границы допустимых значений внешних параметров. В рамках модели идеального упругопластического тела и условия пластичности Мизеса рассмотрен случай предельного состояния диска. Перемещения и деформации считаются малыми; выбирается деформационная теория пластичности. Задача определения напряжений является статически определимой. Перемещения определяются совместно с напряжениями. Для однозначного определения перемещений в рамках модели идеального упругопластического тела, когда диск находится в предельном состоянии, выбирается условие равенства нулю пластических деформаций на боковой поверхности диска. Для модели жесткопластического тела для однозначного определения перемещений надо задавать значение перемещений на боковой поверхности диска. Приведены графики численных расчетов для напряжений, деформаций, перемещений и годографа вектора напряжений.

**Ключевые слова:** плоское напряженное состояние, условие пластичности Мизеса, предельное состояние, жесткопластическое тело, упругопластическое тело, вращающийся диск, годограф вектора напряжений.

### Введение

Задача определения напряженного и деформированного состояния вращающегося диска для разных моделей рассматривалась в ряде работ, например, [1–11]. При этом основное внимание уделялось решению задачи для определенных значений внешних воздействий (параметров). В настоящей работе рассматривается вопрос определения границ, в которых могут изменяться значения внешних параметров, и их зависимость от констант материала, входящих в определяющие уравнения выбранной математической модели.

### Постановка задачи

В приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о вращающемся тонком диске постоянной толщины рис. 1.

Выбирается цилиндрическая система координат  $\rho\theta z$ , ось  $z$  которой проходит через центр диска  $\rho = 0$ , а плоскость  $z = 0$  является средней

плоскостью. На внешний контур диска  $\rho = b$  действует давление  $p_b$ . Выбирается модель изотропного идеального упругопластического тела и условие пластичности Мизеса [2].

Все величины и формулы приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбирается предел пластичности при одноосном растяжении  $k$ , в качестве масштаба длины – радиус диска  $b$ . Для обозначения безразмерных величин сохраняются обозначения размерных величин.

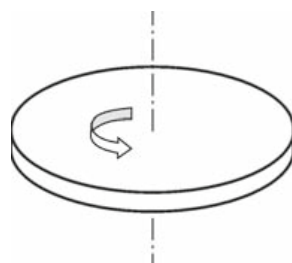


Рис.1. Вращающийся диск

### Пластическое состояние

В области пластического состояния напряжения определяются из решения задачи Коши

$$\begin{cases} \sqrt{\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\rho}^2 - \sigma_{\theta}\sigma_{\rho}} = k, \\ \rho \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} + m\rho^2 = 0, \\ \sigma_{\rho} |_{\rho=0} = k. \end{cases} \quad (1)$$

где  $m = \gamma b^2 \omega^2 / (kg)$  – безразмерный параметр инерционного воздействия,  $\omega$  – угловая скорость вращения диска,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\gamma$  – удельный вес.

Из первого равенства в (1) следует

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{\rho} \pm \sqrt{4k^2 - 3\sigma_{\rho}^2}}{2}. \quad (2)$$

Если, используя (2), исключить из уравнения равновесия окружное напряжение  $\sigma_{\theta}$ , то получим

$$2\rho \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \sigma_{\rho} \pm \sqrt{4k^2 - 3\sigma_{\rho}^2} + 2m\rho^2 = 0. \quad (3)$$

Выбор знака «плюс» или «минус» в (3) не всегда очевиден. Поэтому от задачи Коши (1) можно перейти к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} + m\rho^2 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} (\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} - m\rho^2) = 0, \\ \sigma_{\rho}|_{\rho=0} = \sigma_{\theta}|_{\rho=0} = k. \end{cases} \quad (4)$$

Начальные условия следуют из симметрии поля напряжений в центре диска и условия пластичности.

В рамках деформационной теории пластичности выбираем закон нормальной связи деформаций и напряжений, который для условия пластичности Мизеса дает соотношения:

$$\frac{\varepsilon_{\rho}^p}{2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}} = \frac{\varepsilon_{\theta}^p}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}}, \quad \varepsilon_z^p = -(\varepsilon_{\rho}^p + \varepsilon_{\theta}^p). \quad (5)$$

Для упругопластического тела пластические деформации

$$\varepsilon_{\theta}^p = \varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\theta}^e, \quad \varepsilon_{\rho}^p = \varepsilon_{\rho} - \varepsilon_{\rho}^e.$$

Упругие деформации определяются через напряжения согласно закону Гука

$$E\varepsilon_{\rho}^e = \sigma_{\rho} - \nu\sigma_{\theta}, \quad E\varepsilon_{\theta}^e = \sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\rho}, \quad E\varepsilon_z^e = -\nu(\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta}). \quad (6)$$

Полные деформации определяются через перемещения

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r}. \quad (7)$$

Из (5)–(7), исключая напряжения и деформации, получаем уравнение для радиального перемещения. В центре диска перемещения равны нулю. Поэтому для нахождения радиального перемещения совместно с (4) надо решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial Eu}{\partial \rho} = \frac{2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} \left( \frac{Eu}{\rho} - \sigma_{\theta} + \nu\sigma_{\rho} \right) + \sigma_{\rho} - \nu\sigma_{\theta}, \\ u|_{\rho=0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для модели жесткопластического тела пластические деформации являются полными. Поэтому радиальное перемещение будет определяться из решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} \frac{u}{\rho}, \\ u|_{\rho=0} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В силу симметрии поля напряжений в центре диска

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} = 1.$$

поэтому в малой  $\delta$  окрестности токи  $\rho = 0$  решение уравнения (9) будет иметь вид

$$u = \alpha\rho. \quad (10)$$

Несложно заметить, что

$$\varepsilon_{\rho}|_{\rho=0} = \varepsilon_{\theta}|_{\rho=0} = \alpha.$$

Решение (10) автоматически удовлетворяет условию для перемещений в центре диска. Неопределенная величина  $\alpha$  является параметром управления и определяется из выполнения дополнительного граничного

условия  $u|_{\rho=b} = u_b$ . Если задавать значение величины  $\alpha$ , то  $u_b = u_b(\alpha)$ . Таким образом, перемещения в области  $\delta \leq \rho \leq b$  жесткопластического диска будут определяться из решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} u, \\ u|_{\rho=\delta} = \alpha\delta. \end{cases} \quad (11)$$

Поскольку задача (11) решается численно, то выбор малой величины  $\delta$  ограничен лишь точностью представления вещественных чисел в ЭВМ.

Если для определения параметров состояния диска выбирается модель упругопластического тела, то для диска, находящегося в предельном состоянии, величина  $\alpha$  определяется, например, из условия равенства нулю пластических деформаций на границе  $\rho = b$ .

### Численные результаты

На рис. 2 и рис.3 показаны графики перемещений, полных деформаций, упругих деформаций, пластических деформаций, напряжений, а также гистограмма напряжений, когда выбирается модель упругопластического тела и диск находится в предельном состоянии для следующих значений параметров:  $\nu = 0.2$ ,  $m = 5$ ,  $\alpha = 2.2$ .

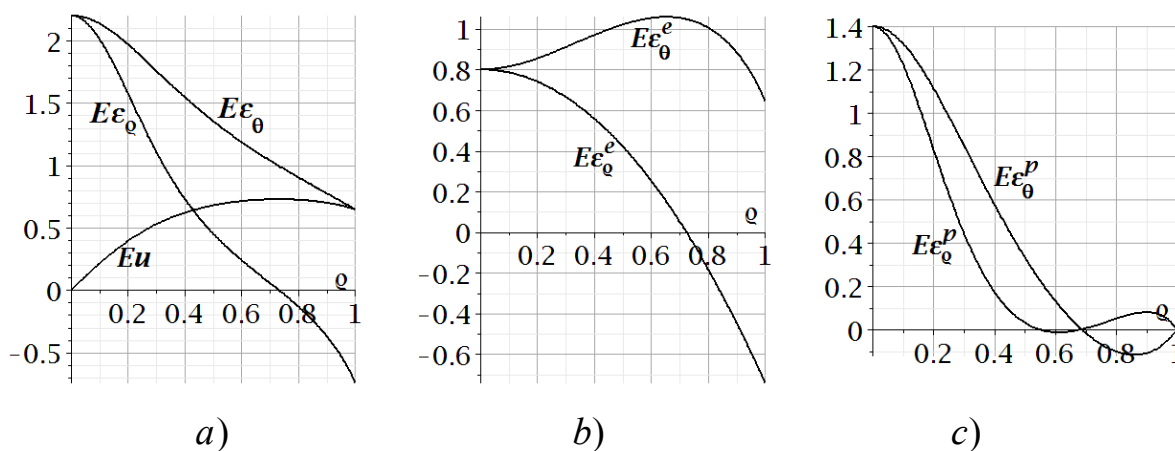


Рис. 2. Графики а) перемещения и полных деформаций, б) упругих деформаций, в) пластических деформаций,

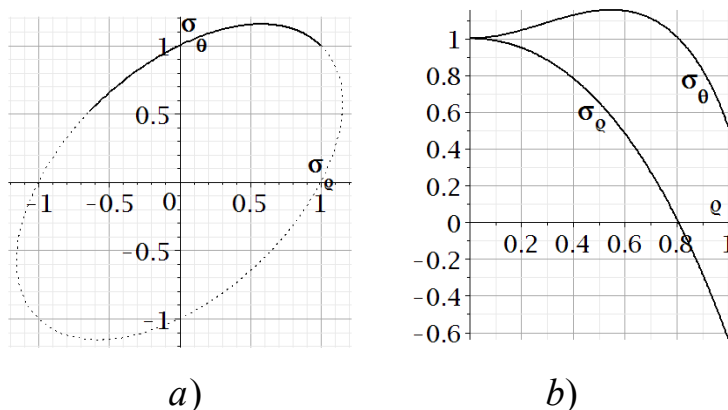


Рис. 3. *a)* График годографа вектора напряжений, *b)* графики напряжений

Графики для годографа вектора напряжений (рис.3.а) являются элементом верификации алгоритма решения задачи. Такой прием верификации использовался также в работах [12, 13].

На рис. 4 показана зависимость перемещений и деформаций от выбора параметра  $\alpha$ , когда  $m = 5$ .

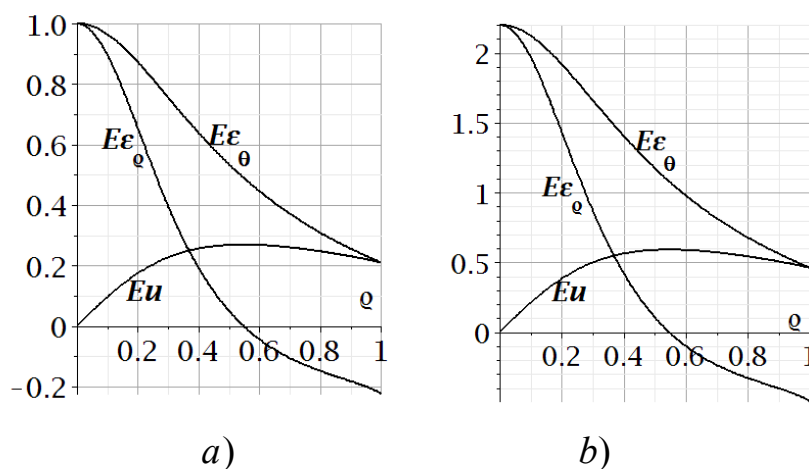


Рис. 4. *a)* Графики перемещений и деформаций. *a)*  $\alpha = 1$ , *b)*  $\alpha = 2.2$

Из сравнения графиков для полных деформаций, приведенных на рис. 2 *a)* и рис. 4 *b)*, можно отметить определенное отличие в полях перемещений и деформаций для моделей жесткопластического и упругопластического тела.

Из условия пластичности Мизеса следует, что наибольшее допустимое значение внешнего давления  $p_b = p_{\max} = 2k/\sqrt{3}$ . Соответствующее этому значению давления, с точностью до  $10^{-4}$ , наибольшее допустимое значение параметра  $m = 6.276$ . Наименьшее допустимое значение параметра  $p_b = -k$ . Для любого гладкой функции пластичности максимальное допустимое значение для внешнего давления определяется по формуле [13]

$$\begin{cases} f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = k, \\ \partial f / \partial \sigma_\theta = 0. \end{cases}$$

### Выводы

В силу того, что напряжения определяются из решения задачи Коши, можно задавать один из параметров  $m$  или  $p_b$ , второй параметр определяется из решения задачи. Наибольшее допустимое значение параметра  $p_b = p_{\max}$  зависит от выбора условия пластичности. Для решения задачи (4) необходимо задавать значение параметра  $m$ , наибольшее допустимое значение которого зависит от то  $p_{\max}$ .

### Литература

1. Timoshenko S. R, Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа. 1969. 608 с.
3. Демьянушко И. В., Биргер И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
4. Boresi P., Schmidt R.J., Sidebottom O.M. Advanced Mechanics of Materials, 5th ed. New York: Wiley, 1993, 810 p.

5. Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
6. Calladine C. R. Engineering Plasticity. Oxford: Pergamon, 1969. 318 p.
7. Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Transactions ASME Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50, pp. 676–678.
8. Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 30–38.
9. Aleksandrova N. Exact deformation analysis of a solid rotating elastic-perfectly plastic disk // International Journal of Mechanical Science, 2014. V. 60, pp. 88-55.
10. Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y. R. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // Archive of Applied Mechanics. 2016. V.86, pp. 235-244.
11. Sahni M., Sharma S. Elastic-plastic deformation of a thin rotating solid disk of exponentially varying density // Res. Eng. Struct. Mat. 2017. Vol. 3. Iss. 2, pp. 123-133.
12. Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Переяславская И. И. О напряженном состоянии тонкого диска с учетом зависимости предела текучести от температуры // Инженерный вестник Дона, 2017, № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359)
13. Aleksandrova N. N., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Shashkin A. I. On stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. Article ID 012001, DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001

---

## References

---



1. Timoshenko S. R., Goodier J. N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1970. 506 p.
  2. Sokolovsky V. V. Teoriya plastichnosti [Plasticity theory]. Moscow: Vysshaya Shkola, 1969. 608 p.
  3. Dem'yanushko I. V., Birger I.V. Raschet na prochnost' vrashchayushchihya diskov [Calculation of the strength of rotating disks]. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 247 p.
  4. Boresi P., Schmidt R.J., Sidebottom O.M. Advanced Mechanics of Materials, 5th ed. New York: Wiley, 1993, 810 p.
  5. Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.
  6. Calladine C. R. Engineering Plasticity. Oxford: Pergamon, 1969. 318 p.
  7. Gamer U. Transactions ASME Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50, pp. 676–678.
  8. Artemov M. A., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2014, № 1, pp. 30–38.
  9. Aleksandrova N. International Journal of Mechanical Science, 2014. V. 60, pp. 88-55.
  10. Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y. R. Archive of Applied Mechanics. 2016. V.86, pp. 235-244.
  11. Sahni M., Sharma S. Res. Eng. Struct. Mat. 2017. Vol. 3. Iss. 2, pp. 123-133.
  12. Artemov M. A., Baranovskii E. S. Berdzenishvili G. G., Pereyaslavskaya I. I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4359).
  13. Aleksandrova N. N., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Shashkin A. I. Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. Article ID 012001, DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012001
-