

## Оптимизация формы ступенчато-призматической балки при изгибе

А.А. Карамышева<sup>1</sup>, Б.М. Языев<sup>1</sup>, А.С. Чепурненко<sup>1</sup>, С.Б. Языева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный строительный университет

<sup>2</sup>Южный Федеральный университет

**Аннотация:** Получено решение задачи оптимизации ступенчато-призматической балки из условия минимума потенциальной энергии деформации при заданном объеме. Задача решена для случая шарнирного опирания по концам и равномерно распределенной по длине нагрузки. Найдено оптимальное значение параметра  $\alpha$ , равного отношению высоты средней ступени к высоте крайней, при котором жесткость балки при постоянных объеме и ширине поперечного сечения максимальна.

**Ключевые слова:** оптимизация, ступенчато-призматическая балка, потенциальная энергия деформации, переменная жесткость, минимальный объем.

Рассмотрим ступенчато-призматическую балку прямоугольного сечения, шарнирно опертую по концам, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 1). Пусть ширина балки постоянна и равна  $b$ , высота крайних ступеней равна  $h$ , а средней ступени –  $ah$ .

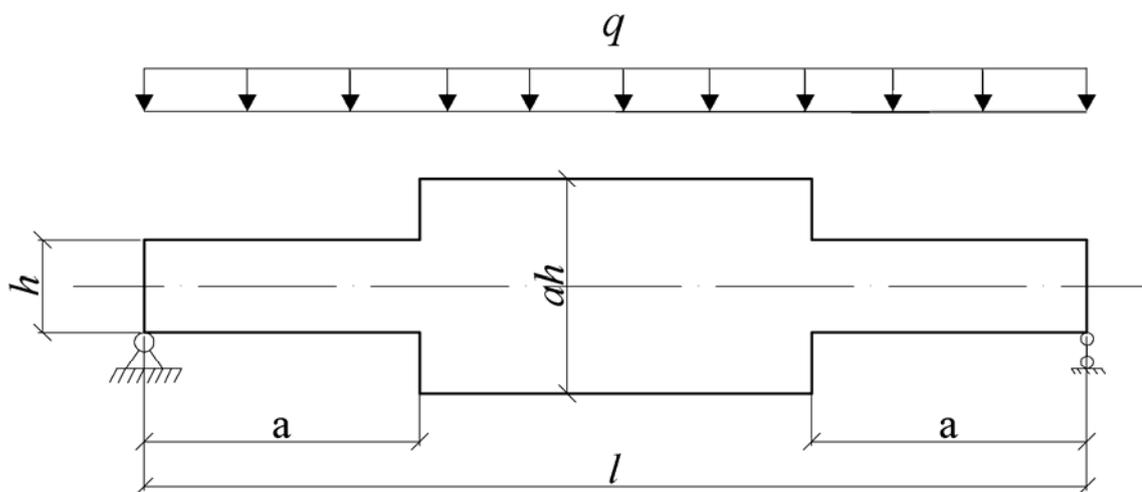


Рис. 1. – Расчетная схема

Согласно [1,2] интегральной мерой, определяющей уровень напряженно-деформированного состояния, может служить потенциальная энергия деформации  $U$ . Чем меньше величина  $U$ , тем лучше система сопротивляется внешним воздействиям. При изгибе потенциальная энергия деформации (ПЭД) определяется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M(x)^2}{E(x)I(x)} dx. \quad (1)$$

Найдем такую величину параметра  $\alpha$ , при которой потенциальная энергия деформации принимает минимальное значение при заданном объеме балки  $V$ . Объем рассматриваемой балки определяется следующим образом:

$$V = b(2ah + (l - 2a)\alpha h) = bh(2a + (l - 2a)\alpha). \quad (2)$$

Выразим из (2) величину  $h$ :

$$h(\alpha) = \frac{V}{b(2a + (l - 2a)\alpha)}. \quad (3)$$

Для определения оптимального значения  $\alpha$  потребуется вычислить производную  $\frac{dh}{d\alpha}$ :

$$\frac{dh}{d\alpha} = -\frac{V}{b(2a + (l - 2a)\alpha)^2} (l - 2a) = -h \frac{l - 2a}{2a + (l - 2a)\alpha}. \quad (4)$$

Моменты инерции крайних ступеней  $I_1$  и средней ступени  $I_2$  определяются следующим образом:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12}, \quad I_2 = \frac{b(\alpha h)^3}{12} = \alpha^3 I_1. \quad (5)$$

Выражение для изгибающего момента имеет вид:

$$M(x) = \frac{qx}{2}(l - x). \quad (6)$$

Подставив (5) в (1), получим:

$$U = \frac{q^2}{8EI_1} \left[ 2 \int_0^a x^2(l - x)^2 dx + \frac{1}{\alpha^3} \int_a^{l-a} x^2(l - x)^2 dx \right] = \frac{q^2}{8EI_1} \left[ k_1 + \frac{k_2}{\alpha^3} \right]. \quad (7)$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  вычисляются следующим образом:

$$k_1 = 2 \int_0^a x^2(l - x)^2 dx = 2 \left( \frac{a^3 l^2}{3} - \frac{la^4}{2} + \frac{a^5}{5} \right); \quad (8)$$

$$k_2 = \int_a^{l-a} x^2(l-x)^2 dx = la^4 - \frac{2a^5}{5} - \frac{2a^3l^2}{3} + \frac{l^5}{30}.$$

Оптимальное значение  $\alpha$  найдем, продифференцировав ПЭД по  $\alpha$  и приравняв к нулю:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} = \frac{q^2}{8E} \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{I_1} \right) \cdot \left( k_1 + \frac{k_2}{\alpha^3} \right) - \frac{3k_2}{\alpha^4 I_1} \right] = 0. \quad (9)$$

Производную  $\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{I_1} \right)$  вычислим как от сложной функции:

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{I_1} \right) = -\frac{1}{I_1^2} \frac{dI_1}{d\alpha} = -\frac{1}{I_1^2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{bh^3}{12} \right) = -\frac{1}{I_1^2} \frac{3bh^2}{12} \frac{dh}{d\alpha} = \frac{36}{bh^3} \frac{l-2a}{2a+(l-2a)\alpha}.$$

Окончательно задача сводится к следующему уравнению:

$$\alpha^4(l-2a)k_1 - 2ak_2 = 0, \quad (10)$$

откуда  $\alpha_{opt} = \sqrt[4]{\frac{2ak_2}{(l-2a)k_1}}$ .

Из полученной формулы видно, что оптимальная величина параметра  $\alpha$  не зависит от ширины сечения  $b$ . Следовательно, с ростом  $b$  будет расти минимальный объем балки, необходимый для выполнения условия прочности. Таким образом, величину  $b$  нужно назначать наименьшей из условия устойчивости плоской формы изгиба балки, либо из конструктивных соображений. Кроме того,  $\alpha_{opt}$  не зависит от материала балки, а также величины нагрузки  $q$ .

На рис. 2 сплошной линией показан график изменения потенциальной энергии деформации балки переменного сечения  $U(\alpha)$  по отношению к ПЭД балки постоянного объема  $U_0$  в зависимости от  $\alpha$  при  $b = 10$  см,  $a = 1$  м,  $l = 6$  м. Штриховой линии соответствует график изменения максимального прогиба балки  $f(\alpha)$  по отношению к прогибу балки постоянного сечения  $f_0$ .

Минимуму потенциальной энергии деформации при указанных исходных данных соответствует  $\alpha_{opt} = 1.6$ . Балка, характеризующаяся минимумом ПЭД, обладает максимальной жесткостью при заданном объеме [1,2].

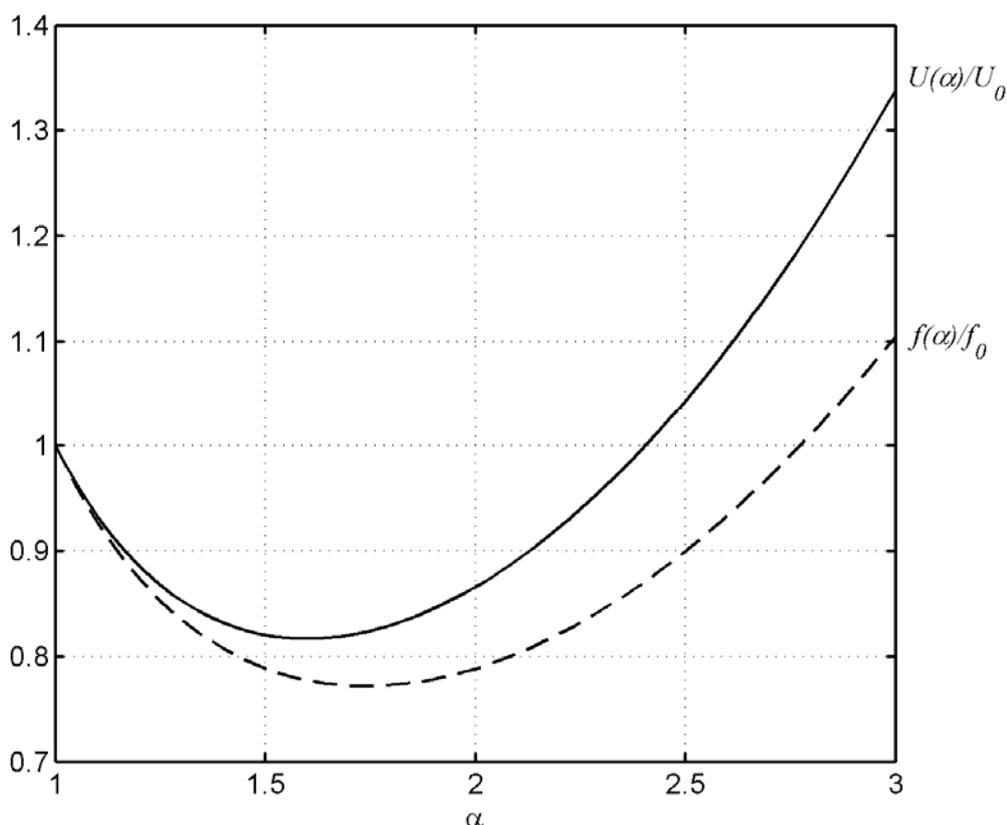


Рис. 2. – Изменение потенциальной энергии деформации и прогиба в середине пролета в зависимости от  $\alpha$

Из рис. 2 видно, что относительно  $\alpha_{opt}$  минимум прогиба смещен немного вправо. Это объясняется тем, что прогиб в середине пролета определяется умножением грузовой эпюры на единичную, а характер эпюры  $M_1$  при действии равномерно распределенной нагрузки отличается от  $M_p$ .

Отметим, что балка наибольшей жесткости не является равнопрочной. При указанных исходных данных максимальные напряжения в крайних ступенях в 1.42 раза больше, чем в средней. Построение моделей

равнопрочных балок и стержней рассматривается в работах [3-5]. Методики создания равнонапряженных конструкций приводятся в статьях [6-10].

### Литература

1. Васильков Г.В. Теория адаптивной эволюции механических систем. Ростов н/Д: Терра-Принт, 2007. 248 с.

2. Васильков Г.В. Эволюционные задачи строительной механики: синергетическая парадигма. Ростов н/Д: ИнфоСервис, 2003. 179 с.

3. Барменкова Е.В., Андреев В.И. Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом изменения жесткости балки по длине // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2011. Т. 7. № 3. С. 50-54.

4. Чепурненко А.С., Языев Б.М. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости // Научное обозрение. 2012. № 6. С. 202-204.

5. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнопрочной многопролетной балки // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1571](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1571).

6. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Муханов А.В. Оптимизация толстостенной сферической оболочки на основе теории прочности Мора // Инженерный вестник Дона. 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890).

7. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyjev B.M. Model of Equal-stressed Cylinder based on the Mohr Failure Criterion // Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland.

8. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе теории прочности Мора // Вестник МГСУ. 2013. №5. С.56-61.

9. Andreev V.I., Avershyev A.S. Nonstationary problem moisture elasticity for a nonhomogeneous hollow thick-walled cylinder // WIT Transactions on the Built Environment. Fluid Structure Interaction VII. 2013. pp. 123-132.

10. Андреев В.И., Потехин И.А. О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел // Вестник Отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. 2007. № 11. С. 48-52.

### References

1. Vasil'kov G.V. Teoriya adaptivnoy evolyutsii mekhanicheskikh system [The theory of adaptive evolution of mechanical systems]. Rostov n/D: Terra-Print, 2007. 248 p.

2. Vasil'kov G.V. Evolyutsionnye zadachi stroitel'noy mekhaniki: sinergeticheskaya paradigma [Evolutional problems of structural mechanics: synergetic paradigm]. Rostov n/D: InfoServis, 2003. 179 p.

3. Barmenkova E.V., Andreev V.I. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2011. T. 7. № 3. pp. 50-54.

4. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Nauchnoe obozrenie. 2012. № 6. pp. 202-204.

5. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Yazyev B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №1. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1571](http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1571).

6. Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Mukhanov A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №3. URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2013/1890).

7. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Jazyjev B.M. Advanced Materials Research Vols. 887-888 (2014) pp 869-872. Trans Tech Publications, Switzerland.

8. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Yazyev B.M. Vestnik MGSU. 2013. №5. pp.56-61.

9. Andreev V.I., Avershyev A.S. WIT Transactions on the Built Environment. Fluid Structure Interaction VII. 2013. pp. 123-132.



10. Andreev V.I., Potekhin I.A. Vestnik Otdeleniya stroitel'nykh nauk Rossiyskoy akademii arkhitektury i stroitel'nykh nauk. 2007. № 11. pp. 48-52.