

Аналитическое решение задачи синтеза нелинейной системы стабилизации на основе математической CGA-модели

А.Р. Гайдук¹, Р.А. Нейдорф², Н.В. Кудинов², В.В. Полях²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Донской государственной технической университет, Россия, Ростов-на-Дону

Аннотация: Для создания современных систем стабилизации различных объектов и технических систем, как правило, необходимы математические модели с аналитическими свойствами. Это обусловлено тем, что большинство существующих методов синтеза автоматических систем построено на математических преобразованиях моделей объектов управления. Однако для сложных объектов и систем эти модели получают экспериментальным путем, причем данные экспериментов аппроксимируются различными, хорошо известными методами. Если зависимости имеют существенно нелинейный характер, их аппроксимируют по участкам. Такая фрагментарная модель в целом не является аналитической, что исключает применение многих известных методов синтеза нелинейных систем стабилизации. В этих случаях целесообразно применять новый разработанный в ДГТУ метод Cut-Glue аппроксимации, который позволяет получать аналитическую модель объекта из кусочных аппроксимаций. В данной работе это иллюстрируется примером синтеза нелинейной системы стабилизации высоты полета дирижабля.

Ключевые слова: система стабилизации, аналитический синтез, нелинейный объект управления, математическая модель, квазилинейная форма, экспериментальные данные, фрагментарная модель, мультипликативно аддитивная аппроксимация.

Введение

Разработка современных систем управления различными техническими процессами, объектами и системами связана с использованием их математических моделей (ММ). Требование наличия математической модели объекта управления или технической системы особенно характерно для аналитических методов синтеза, которые позволяют находить законы управления, в том числе и нелинейными объектами, путем решения некоторых систем математических уравнений [1-4]. Именно для составления этих разрешающих уравнений и требуются ММ объектов управления или технических систем.

Применительно к объектам и техническим системам, в которых протекают сложные и малоизученные процессы, для построения ММ обычно используется экспериментальный подход. Он основывается на сопоставлении

специально подаваемых на входы объекта или системы воздействий, варьируемых в соответствии с планом эксперимента [5], и выходных реакций объекта или системы на них. Данные о зависимости выходных переменных от внешних воздействий математически описываются аппроксимирующими эти данные функциями. Структура и свойства этих функций зависят от применяемого метода аппроксимации. При сложном нелинейном характере экспериментальных данных (ЭД) подобрать для них единую аппроксимирующую функцию сложно, а, часто, и невозможно. В этом случае применяют «кусочный» (фрагментарный) подход [6], или сплайн-методы [7], однако полученная этими методами фрагментарная ММ нелинейного объекта является не аналитической. Это не позволяет применять к такой ММ большинство известных методов синтеза нелинейных законов управления (НЗУ). Для преодоления этого препятствия разработан метод Cut-Glue аппроксимации (CGA), который позволяет из фрагментарных моделей построить аналитическую CGA-ММ объекта в целом [8].

В настоящее время разработано довольно много аналитических методов синтеза нелинейных законов стабилизации, но для применения каждого из них необходимо, чтобы ММ была аналитической, а её уравнения были представлены в определенной форме. В данном случае изложение ориентировано на парадигму квазимодалного управления нелинейными объектами, суть которого состоит в придании желаемых значений корням характеристического полинома некоторой функциональной матрицы [1, 9]. Для применения этого метода синтеза также необходимо ММ объекта или технической системы привести к так называемой квазилинейной модели (КЛМ), которая позволяет, как показано в [10, 11], находить нелинейные управления аналитическим методом.

Излагаемый ниже подход основан на том, что аналитический характер CGA-ММ, несмотря на ее структурную сложность, позволяет, в ряде частных

случаев, достаточно просто привести её к квазилинейной модели, а затем найти искомый закон стабилизации (НЗС) нелинейной системы.

Постановка задачи

Для решения проблемы создания аналитического формализованного метода синтеза систем управления существенно нелинейными объектами на основе CGA –моделей необходимо:

- проанализировать математические особенности методики синтеза законов управления нелинейными объектами на основе квазилинейных моделей;
- сформулировать требования к структуре представления нелинейных ММ ОУ, обеспечивающих возможность построения квазилинейных моделей нелинейных ОУ;
- исследовать структуру ММ конкретного ОУ предлагаемым методом, разработать подходы, позволяющие конструировать CGA-модели, допускающие синтез на их основе квазимодальных управления.

Структура и свойства квазилинейных форм математических моделей

В основе метода построения квазилинейных форм ММ (далее квазилинейных моделей – КЛМ) лежит понятие криволинейного интеграла и его свойство независимости от пути интегрирования [12]. Подробное математическое обоснование этого метода дано в работе [10, с. 277-291]. Поэтому, не останавливаясь на теоретических подробностях, продемонстрируем построение КЛМ на примере скалярной нелинейной функции.

Пусть некоторый объект характеризуется нелинейной зависимостью, которая описывается функцией двух аргументов:

$$f(x) = 3x_1^2 x_2^3 + 2x_1^4. \quad (1)$$

Эта функция является аналитической, т.к. имеет непрерывные частные производные – функции тех же аргументов x_1 и x_2 :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 6x_1 x_2^3 + 8x_1^3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 9x_1^2 x_2^2. \quad (3)$$

Для создания КЛМ вычисляются ее функционально зависимые коэффициенты $a_i(x)$, как определенные интегралы от функций (2) и (3) по дополнительной переменной θ , которая вводится как множитель переменной x_i . При этом, естественно, реальные аргументы исходной функции считаются независимыми от переменной интегрирования θ . Причем при вычислении определенных интегралов переменная x_i , индекс которой равен индексу вычисляемого коэффициента $a_i(x)$ заменяется произведением θx_i , а переменные, индекс которых больше i полагаются равными нулю. Интегралы берутся по вновь введенной независимой переменной θ , причем в пределах от 0 до 1. При этом формируются новые функции, аргументами которых, как и в (1-3), будут исходные независимые переменные x_i .

В данном примере это приводит к следующему результату:

$$a_1(x) = \int_0^1 (6(\theta x_1) x_2^3 + 8(\theta x_1)^3) \Big|_{x_2=0} d\theta = 8x_1^3 \int_0^1 \theta^3 d\theta = 8x_1^3 \frac{\theta^4}{4} \Big|_0^1 = 2x_1^3; \quad (4)$$

$$a_2(x) = \int_0^1 9x_1^2 (\theta x_2)^2 d\theta = 9x_1^2 x_2^2 \int_0^1 \theta^2 d\theta = 9x_1^2 x_2^2 \frac{\theta^3}{3} \Big|_0^1 = 3x_1^2 x_2^2. \quad (5)$$

После вычисления коэффициентов $a_i(x)$, КЛМ исходно заданной функции записывается в следующем виде:

$$f^{KLM}(x) = a_1(x)x_1 + a_2(x)x_2. \quad (6)$$

Подставив в КЛМ (6) коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ из (4) и (5), нетрудно убедиться, что новая квазилинейная ММ в форме (4) в точности

описывает исходную нелинейную зависимость (1). Таким образом, в данном подходе исходная нелинейная функция не линеаризуется (несмотря на название), а остается нелинейной со всеми присущими ей особенностями. Но она преобразуется к форме, делающей удобным использование ее в некоторых преобразованиях, в частности, при синтезе нелинейных законов управления (ЗУ) нелинейными объектами. Это применение КЛМ и рассматривается в данной статье.

Замечание. В некоторых случаях нелинейная функция одного аргумента равна нулю при нулевом значении аргумента и делится на свой аргумент без остатка. Эти свойства обеспечивают существование её КЛМ.

Основные положения метода синтеза управления на основе квазилинейной модели

При синтезе ЗУ нелинейным объектом произвольного порядка с аддитивным управлением удобно, чтобы его ММ имела квазилинейную форму в виде системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + b(x)u; \\ y &= c^T(x)x, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где x – n -вектор переменных состояния; u , y – управление и выходная управляемая переменная; $A(x)$ и $b(x)$, $c(x)$ – функциональные матрица и векторы; их элементы $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$ определяются по функциям переменных выражения вида (6) в описываемом им ОУ.

Квазилинейная модель (7) нелинейного объекта позволяет аналитически синтезировать нелинейный закон стабилизации, как показано в [10, 11 и 13]. Этот закон ищется также в квазилинейной форме, т.е. в виде

$$u = u(x) = -k^T(x)x = -[k_1(x)x_1 + k_2(x)x_2 + \dots + k_n(x)x_n], \quad (8)$$

где $k_i(x)$ – искомые функциональные коэффициенты НЗС, $i = \overline{1, n}$.

Из (7) и (8) следует, что уравнение замкнутой системы также должно иметь вид, соответствующий структуре КЛМ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= D(x)x; \\ y &= c^T(x)x, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $D(x)$ – так же функциональная $n \times n$ -матрица замкнутой системы, определяемая выражением

$$D(x) = A(x) - b(x)k^T(x), \quad (10)$$

Эта матрица, как и любая другая квадратная матрица, имеет определитель, который, как показано в [10], можно представить следующим образом:

$$D(p, x) = \det(pE - D(x)) = A(p, x) + \sum_{i=1}^n k_i(x)V_i(p, x). \quad (11)$$

Здесь $A(p, x)$ и $V_i(p, x)$ – полиномы от p , определяемые выражениями [13]:

$$A(p, x) = \det(pE - A(x)) = p^n + \alpha_{n-1}(x)p^{n-1} + \dots + \alpha_1(x)p + \alpha_0(x), \quad (12)$$

$$V_i(p, x) = e_i \cdot \text{adj}(pE - A(x))b(x) = v_{i,n-1}(x)p^{n-1} + \dots + v_{i,1}(x)p + v_{i,0}(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

где e_i – i -я строка единичной матрицы; $\alpha_1(x)$, $v_{ij}(x)$ – функциональные коэффициенты.

Как отмечалось выше, идея квазимодального управления заключается в придании корням характеристического полинома $D(p, x)$ матрицы $D(x)$ в (10) замкнутой системы (9) таких постоянных различных значений, при которых этот полином удовлетворяет критерию Гурвица. Задавшись n такими корнями p_i , можно, пользуясь теоремой Виета, построить полином

$$D^*(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i) = p^n + \delta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \delta_1p + \delta_0, \quad (14)$$

где δ_i – постоянные коэффициенты полинома $D^*(p)$. Они находятся в результате перемножения двучленов $(p - p_i)$ в (14) и используются ниже при определении искоемых функциональных коэффициентов $k_i(x)$ из (8).

Замена в равенстве (11) полинома $D(p, x)$ полиномом (14), приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов $k_i(x)$. Эта система легко составляется по коэффициентам полиномов $V_i(p, x)$ (13), а также полинома

$$H(p, x) = D^*(p) - A(p, x) = \eta_{n-1}(x)p^{n-1} + \eta_{n-2}(x)p^{n-2} + \dots + \eta_0(x), \quad (15)$$

и имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} v_{10}(x) & v_{20}(x) & \dots & v_{n0}(x) \\ v_{11}(x) & v_{21}(x) & \dots & v_{n1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1n-1}(x) & v_{2n-1}(x) & \dots & v_{nn-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(x) \\ k_2(x) \\ \vdots \\ k_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0(x) \\ \eta_1(x) \\ \vdots \\ \eta_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Решение системы (16) однозначно определяет искомый закон стабилизации (8). Как показано в [10], этот закон обеспечивает устойчивость положения равновесия $x = 0$ нелинейной системы (9) в большом. Условия, при которых это положение равновесия является асимптотически устойчивым в целом, т.е. при любых начальных значениях $x_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, получены в [13].

Таким образом, метод КЛМ позволяет аналитически найти НЗС, но для построения КЛМ ОУ необходимо, чтобы ММ объекта или технической системы была аналитической и имела необходимые дополнительные свойства.

Построение методом CGA аналитической формы ММ канала «угол атаки – подъемная сила» дирижабля

Для содержательного и наглядного пояснения решения поставленной задачи с использованием метода CGA в задачах математического описания объектов управления (ОУ), рассмотрим методику и особенности его применения на примере задачи синтеза системы стабилизации высоты полета дирижабля. Особенностью этой системы является использование изменения лифтинга L , который возникает под действием набегающего потока воздуха. Этот эффект возникает при наличии угла атаки α движущегося воздушного судна, отличного от равновесного значения $\alpha_0 = 0$, при котором $L = 0$ [14].

В статье используются экспериментальные данные, полученные при исследовании 3D модели дирижабля. Они идентифицируют зависимость его лифтинга от угла атаки $L(\alpha)$, т.е. статику дирижабля при полете на крейсерской высоте. Необходимые для иллюстрации решения поставленной задачи фрагменты этой зависимости лифтинга L (в N) от угла атаки дирижабля α (в угловых градусах), приведены в таблице 1. Полу жирным шрифтом проставлено значение полученного экстраполяцией угла $\alpha = 40,79^0$, а также соответствующее ему значение лифтинга $L(40,79^0) = 180,389 \text{ kN}$. Соответствующий им график точечной зависимости $L(\alpha)$ показан на рис. 1 контурными квадратами.

Таблица № 1.
Зависимость $L(\alpha)$.

$0^0 \leq \alpha \leq 40,79^0$	α	0^0	6^0	12^0	18^0	24^0	30^0	36^0	$40,79^0$
	$L_1^e(\alpha)$	305	38951	76347	92520	11730	148,26	180391	185389
$40,79^0 \leq \alpha \leq 72^0$	α	$40,79^0$	48^0	54^0	60^0	66^0	72^0		
	$L_2^e(\alpha)$	185389	113463	67554	34310	13734	5824		

Из данных таблицы 1 и точечного графика на рис. 1 хорошо видно, что в исследуемом диапазоне углов атаки $0^0 \leq \alpha \leq 72^0$ статическая характеристика

рассматриваемого канала управления состоит из двух радикально отличающихся ветвей. В точке $\alpha = 40,79^0$ фрагменты имеют противоположные по знаку производные $dL/d\alpha$. Это связано с условиями взаимодействия набегающего воздушного потока с корпусом дирижабля и его наружными деталями [14].

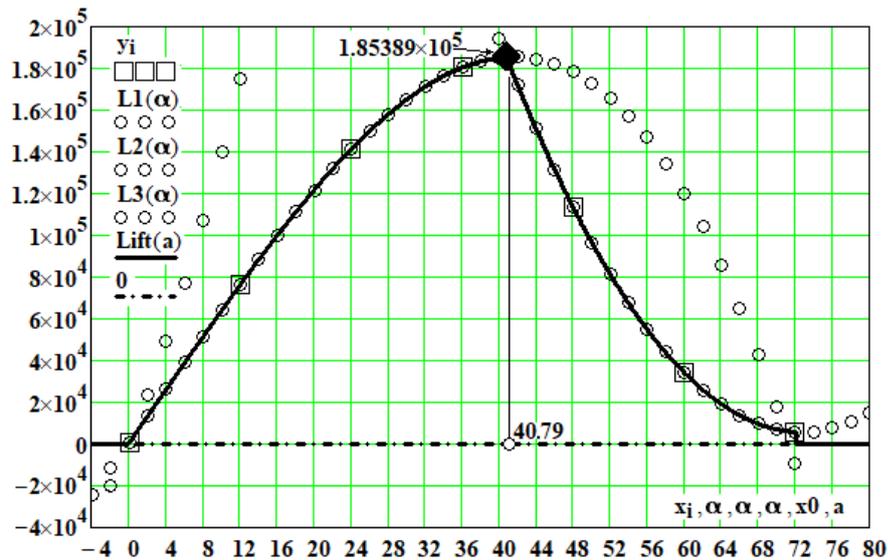


Рис 1. Cut-Glue аппроксимация $L(\alpha)$ модели дирижабля

Метод CGA предполагает математическое описание выделенных фрагментов с использованием методов классического регрессионного анализа [15-17]. Поэтому, для приведенных в строках табл. 1 фрагментарных массивов ЭД, которые соответствуют диапазонам $0^{\circ} \leq \alpha \leq 40,79^{\circ}$ и $40,79^{\circ} \leq \alpha \leq 72^{\circ}$, получены степенные полиномы (СП) – уравнения регрессии, которые с достаточной точностью описывают моделируемую зависимость на этих интервалах, но выражениями не совсем обычной структуры:

$$\left. \begin{aligned} \forall 0,0^{\circ} \leq \alpha \leq 40,79^{\circ} \rightarrow L_1^e(\alpha) &= 6511,65\alpha + 0,979054\alpha^2 - 1,01816\alpha^3 - 0,00460977\alpha^4; \\ \forall 40,79^{\circ} \leq \alpha \leq 72^{\circ} \rightarrow L_2^e(\alpha) &= 43410,94\alpha - 1701,57\alpha^2 + 22,3751\alpha^3 - 0,0986265\alpha^4, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Во всех уравнениях (17) постулировано отсутствие свободного члена. Это структурное ограничение введено для адаптации ММ ОУ к форме КЛМ. Достаточное количество точек (степеней свободы) в массиве ЭД и гибкость классического регрессионного анализа, как инструмента нелинейной

аппроксимации при использовании полиномиальных структур [16], позволяют это сделать с допустимой точностью даже для правого фрагмента. При обычной оптимизации погрешности аппроксимации вид функции $L_2^e(\alpha)$ был бы совсем другим.

Полученные экспериментально характеристики канала «угол атаки–лифтинг» в (17) в виде полиномов $L_1^e(\alpha)$ и $L_2^e(\alpha)$ (соответствующие параболы показаны на рис. 1 сплошными линиями), формально, описывают исследуемую зависимость только в указанных для них диапазонах аргумента α , а во всем диапазоне $0^0 \leq \alpha \leq 72^0$ эта функция не аналитическая. Однако метод CGA позволяет придать такого рода зависимости аналитические свойства, описав «сломы» характеристики сглаженными кривыми [6, 8]. Это позволяет построить единую ММ $L(\alpha)$ для $0^0 \leq \alpha \leq 72^0$ в форме аналитической зависимости [6, 8, 11]. В данном случае, в соответствии с методом CGA эта единая зависимость $L(\alpha)$, построенная на основе (17), принимает следующий вид:

$$L(\alpha) = L_1^e(\alpha)M_1(\alpha, \alpha_{l1}, \alpha_{r1}, \varepsilon) + L_2^e(\alpha)M_2(\alpha, \alpha_{l2}, \alpha_{r2}, \varepsilon), \quad (18)$$

где структура, т.н. мультипликативно изолирующей функции (МИФ), имеет вид

$$M_i(\alpha, \alpha_{li}, \alpha_{ri}, \varepsilon) = \frac{[\alpha - \alpha_{li} + \sqrt{(\alpha - \alpha_{li})^2 + \varepsilon^2}] \cdot [\alpha_{ri} - \alpha + \sqrt{(\alpha_{ri} - \alpha)^2 + \varepsilon^2}]}{4 \left[\sqrt{(\alpha - \alpha_{li})^2 + \varepsilon^2} \right] \cdot \left[\sqrt{(\alpha_{ri} - \alpha)^2 + \varepsilon^2} \right]}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

В выражениях (18), (19) α_{li} , α_{ri} – левая и правая границы i -го интервала изменения переменной α соответственно; ε – настроечный параметр МИФ $M_i(\alpha, \alpha_{li}, \alpha_{ri}, \varepsilon)$, определяющий краевую точность выделения функций $L_i^e(\alpha)$ в их областях определения, заданных интервалами $[\alpha_{li}, \alpha_{ri}]$. Для фрагментарных зависимостей (17), указанные параметры в (19) положены равными следующим значениям: $\alpha_{l1} = -1^0$; $\alpha_{r1} = 40,79^0$; $\alpha_{l2} = \alpha_{r1}$; $\alpha_{r2} = 73^0$; $\varepsilon = 0,01$. Значения α_{l1} и

α_{r2} сдвинуты на 1^0 влево и вправо, соответственно для исключения погрешности воспроизведения краевых значений функции $L(\alpha)$.

Важным свойством функции $M_i(\alpha, \alpha_{li}, \alpha_{ri}, \varepsilon)$, является, то, что в пределах интервала $\alpha_{li} < \alpha < \alpha_{ri}$ она практически равна 1, а за его границами практически равна нулю. Граничные же её значения $M_i(\alpha_{li}, \alpha_{li}, \alpha_{ri}, \varepsilon) = M_i(\alpha_{ri}, \alpha_{li}, \alpha_{ri}, \varepsilon) = 0,5$, что и вызывает необходимость смещения внешних границ массива ЭД. График результирующей аналитической функции $L(\alpha)$ построен на рис. 1 в виде точечной кривой практически без погрешности совпадающей с участками интервальных характеристик $L_1^e(\alpha)$ и $L_2^e(\alpha)$. Убедиться в том, что эта функция является непрерывной и имеет непрерывную первую производную (кстати, и более высокого порядка тоже) во всем диапазоне α можно, исследовав ее аналитически. Графически это подтверждается тем, что точечная функция (в легенде графика – $Lift(\alpha)$ – нижняя, слева) строится по сформированным в пакете MathCAD формулам (18), (19) при $0^0 \leq \alpha \leq 72^0$. Это показывает, что она может использоваться в аналитических преобразованиях и является эффективной ММ исследуемого канала. Таким образом, Cut-Glue аппроксимация экспериментальных данных фрагментарной структуры может применяться для построения характеристик каналов любых нелинейных объектов в аналитической форме.

Преобразование аналитической CGA модели в квазилинейную форму

Второй вопрос, который нужно решить для достижения цели, сформулированной в постановке задачи настоящей статьи является построение квазилинейной модели для ММ (18), полученной выше методом CGA. Как показано выше, в общем случае построение квазилинейной модели

включает дифференцирование и интегрирование производных от нелинейных зависимостей. Поэтому, с учетом существенных нелинейностей Cut-Glue аппроксимации и громоздкости соответствующих выражений, в данной работе исследуется вопрос о пригодности моделей, полученных этим методом для построения КЛМ. Анализ вопроса показал, что можно воспользоваться двумя свойствами CGA. Во-первых, важна аналитичность структуры его ММ в целом. Во-вторых, если в (18) $L_i^e(\alpha)$ применяются в виде степенных полиномов, то возникает возможность использовать их без свободных членов. Тогда они удовлетворяют условиям:

$$\forall \alpha \in [\alpha_{li}, \alpha_{ri}] \rightarrow L_i^e(\alpha) : L_i^e(\alpha) = \alpha \cdot L_i^{el}(\alpha), \quad (20)$$

где $L_i^{el}(0) \neq 0$.

Условие (20) с очевидностью соответствуют приведенному выше пожеланию о возможности построения КЛМ без применения усложненных, в случае CGA, операций дифференцирования и интегрирования. Это позволяет непосредственно преобразовать выражение (18) в КЛМ по результатам Cut-Glue аппроксимации $L(\alpha)$ канала «угол атаки–лифтинг» дирижабля:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^N L_i^{el}(\alpha) \cdot \alpha, \quad (21)$$

т.е., в рассматриваемом примере, где $N = 2$,

$$L(\alpha) = \left[\left(6511,65 + 0,979054\alpha - 1,01816\alpha^2 - 0,00460977\alpha^3 \right) M_1(\alpha, \alpha_{l1}, \alpha_{r1}, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \left(43410,94 - 1701,57\alpha + 22,3751\alpha^2 - 0,0986265\alpha^3 \right) M_2(\alpha, \alpha_{l2}, \alpha_{r2}, \varepsilon) \right] \cdot \alpha. \quad (22)$$

Квазилинейная модель канала стабилизации высоты полета дирижабля

Переходя к построению математической модели канала «угол атаки α – высота h » полета дирижабля в квазилинейной форме, примем, что его

установившееся движение происходит на постоянной высоте h_0 при выбранном для пилотирования угле атаки α_0 , обеспечивающем $L(\alpha_0) = G$, где G вес аппарата.

Для записи уравнений движения, следуя [9-11, 13] используются обозначения: x_1 и x_2 – отклонение угла атаки $\Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha_0$ и скорость его изменения $\dot{\alpha}(t)$; $x_3 = K_h(h_0 - h(t))$, где $h_0^{\text{об}} = y_0$ и $h(t)^{\text{об}} = y(t)$ – заданное и текущее (наблюдаемое) значение высоты полета дирижабля, x_4 – скорость изменения высоты $\dot{y}(t)$, K_h – размерный коэффициент пропорциональности [11].

Там же показано, что стабилизирующее управление u_h , влияет на ускорение угла атаки посредством интегрирующего исполнительного устройства с коэффициентом передачи K_α . С учетом введенных обозначений и равенств (21), (22) уравнение рассматриваемого дирижабля, в векторно-матричной квазилинейной форме принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + b(x)u_h; \\ y &= y_0 - x_3 / K_h, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_1(x_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Для краткости в выражениях (24) введены обозначения $C_1(x_1) = L^{el}(x_1) / m$; $C_2 = K_\alpha / I$; m и I – масса дирижабля и момент инерции его вращения относительно поперечной горизонтальной оси; $L^{el}(x_1)$ – величина лифтинга, определяемая выражением (22).

В соответствии с изложенным выше методом синтеза управление $u_h = u_h(x)$ ищется в квазилинейной форме для $n = 4$. Согласно (8) получим:

$$u_h(x) = -k^T(x)x = -[k_1(x) \ k_2(x) \ k_3(x) \ k_4(x)]x. \quad (25)$$

Функциональные коэффициенты $k_i(x)$ определяются решением системы алгебраических уравнений (16), которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1(x_1)C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1(x_1)C_2 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(x) \\ k_2(x) \\ k_3(x) \\ k_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Здесь δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ – коэффициенты желаемого полинома $D^*(p)$ (14), так как в данном случае в выражении (12) полином $A(p, x) = p^4$. Решение системы (26), подставленное в равенство (25), дает искомый НЗС:

$$u_h(x) = -k^T(x)x = -\begin{bmatrix} \frac{\delta_2}{C_2} & \frac{\delta_3}{C_2} & \frac{\delta_0}{C_2 C_1(x_1)} & \frac{\delta_1}{C_2 C_1(x_1)} \end{bmatrix} x. \quad (27)$$

Подставив матрицу $A(x)$, вектор $b(x)$ (24) и вектор $k^T(x)$ из (27) в равенство (10), получим матрицу $D(x)$ замкнутой системы $\dot{x} = D(x)x$. По формуле $D(p, x) = \det(pE - D(x))$, можно убедиться, что её характеристический полином совпадает с полиномом $D^*(p)$ (14), который по построению удовлетворяет критерию Гурвица. В соответствии с теоремой, доказанной в [10], положение равновесия $x=0$ замкнутой системы стабилизации высоты полета дирижабля (24-28) является асимптотически устойчивым в большом, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ при конечных значениях начальных условий.

Проверка корректности синтезированного замкнутого нелинейного управления столь существенно нелинейным каналом, как рассмотренный выше возможна исключительно методами компьютерного моделирования с использованием современных математических пакетов программ [18 - 20].

Компьютерное моделирование нелинейной системы стабилизации высоты полета дирижабля

Структурно-функциональная схема системы автоматической стабилизации высоты полета дирижабля, реализующей стабилизацию высоты через исследуемый канал по закону (27) при ММ канала (18-20) приведена на рис. 2.

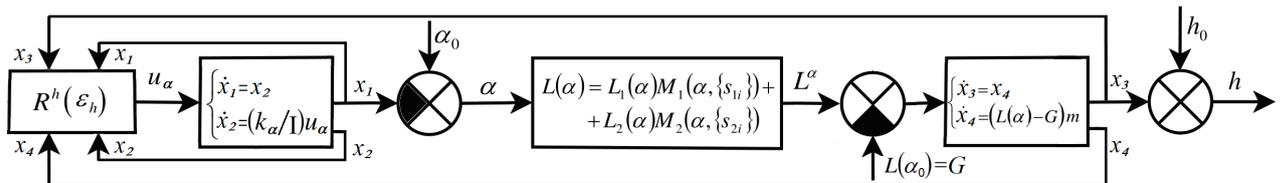


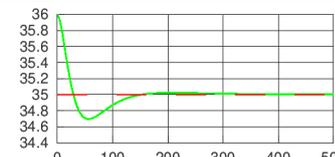
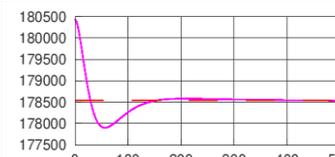
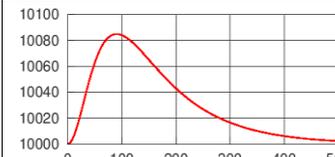
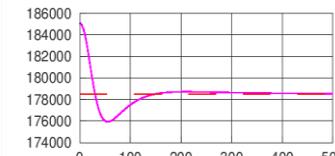
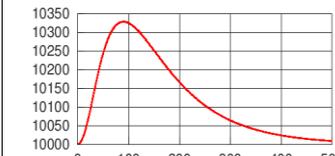
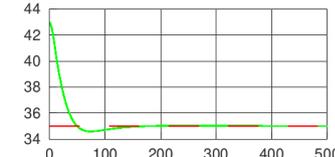
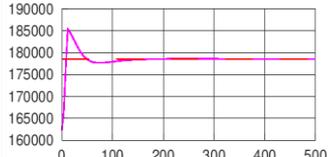
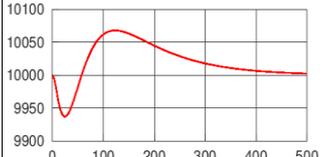
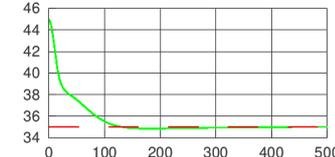
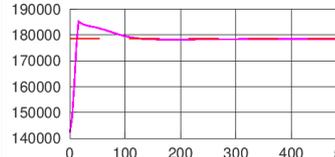
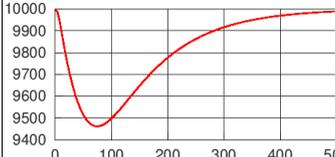
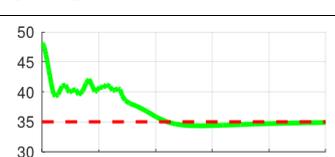
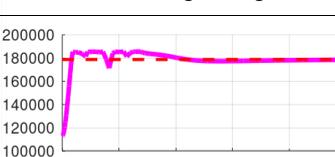
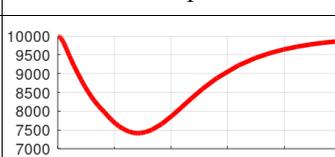
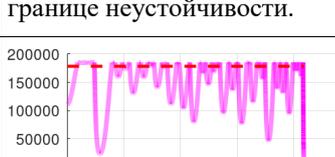
Рис. 2. Структурно-функциональная схема нелинейной системы стабилизации высоты полета дирижабля нелинейным квазимодальным законом управления

Суть компьютерного исследования состоит в анализе эффективности и оценке реального диапазона подавления возмущений по углу атаки дирижабля, возникающих при полете за счет, например, действия шквалистых порывов ветра, при которых воздушное судно, обладающее внушительными размерами, может почти мгновенно частично изменять пространственную ориентацию. Инерционность, и самого объекта, и его систем управления, а также существенная нелинейность каналов управления затрудняет задачу построения автоматических систем управления движениями дирижабля. В данной статье авторы исследуют возможность ее решения с использованием наиболее современных методов описания и синтеза систем в условиях нелинейности. Результаты моделирования приведены в таблице 2.

Полученные при моделировании переходные процессы по основным каналам изменения угла атаки $\alpha(t)$, подъемной силы $L(t)$ и изменения высоты $h(t)$ свидетельствуют об эффективной стабилизации высоты полета дирижабля квазимодальным законом управления, синтез которого был осуществлен благодаря возможностям математического моделирования нелинейных объектов методом CGA.

Таблица № 2.

Подавление возмущений по углу атаки α с использованием CGA MM L(α).

Величина возмущения	$\alpha(t)$ ($\alpha_0=35^0$)	$L(t)$, kN	$h(t)$, m
$\Delta\alpha _{t=0}=1^0$; До экстремальных процессов стабилизации	 Возврат к равносному значению угла атаки с перерегулированием.	 Возврат к равносному значению лифтинга с перерегулированием.	 Подъём на ~85 м и возврат на равносное значение высоты полета
$\Delta\alpha _{t=0}=5^0$; До экстремальных процессов стабилизации	 Возврат к равносному значению угла атаки с перерегулированием.	 Возврат к равносному значению лифтинга с перерегулированием.	 Подъём на ~330 м и возврат на равносное значение высоты полета
$\Delta\alpha _{t=0}=8^0$; Процессы стабилизации с переходом через экстремум	 Возврат к равносному значению угла атаки с небольшим перерегулированием.	 Возврат к равносному значению лифтинга с начальным скачком и перерегулированием.	 Возврат к равносному уровню с падением и подъёмом высоты из-за перехода через экстремум.
$\Delta\alpha _{t=0}=10^0$; Критические процессы стабилизации с переходом через экстремум	 Возврат к равносному значению угла атаки без перерегулирования, но нелинейно траектории.	 Возврат к равносному значению лифтинга с начальным скачком и перерегулированием по нелинейной траектории.	 Возврат к равносной высоте полета с падением на ~550 м из-за большого возмущения с понижением лифтинга
$\Delta\alpha _{t=0}=13.2^0$ Процессы стабилизации критической амплитуды	 Возврат к равносному значению угла атаки по колебательному закону, близкому к границе неустойчивости.	 Возврат к равносному значению лифтинга по колебательному закону, близкому к границе неустойчивости.	 Возврат к равносной высоте полета с падением на ~2500 м из-за возмущения с большим понижением лифтинга
$\Delta\alpha _{t=0}=13.4^0$; Выход за зону стабилизируемости и устойчивости модели	 Процесс неустойчивого поведения системы управления углом атаки.	 Процесс неустойчивого поведения лифтинга при хаотичном поведении угла атаки.	 Процесс падения дирижабля при неустойчивом поведении системы стабилизации высоты.

Однако следует отметить, что, как и следовало ожидать, нелинейность квазиמודальных систем управления приводит к ограниченности области их устойчивости. В районе возмущения $\Delta\alpha|_{t=0} \sim 13,2^0$ наблюдается резкое ухудшение качества работы системы стабилизации, что связано с приближением ее к границе устойчивости. Действительно, уже при $\Delta\alpha|_{t=0} \sim 13,4^0$ система демонстрирует полную потерю устойчивости, что приводит к падению воздушного судна с нарастающей скоростью (отрицательная часть характеристики является виртуальной, т.к. при $h(t)=0$ дирижабль сталкивается с землей).

Заметим, что синтезированная система показала высокие качественные показатели, т.к. не теряет стабилизирующих свойств при переходе возмущенного предполагаемым шквалом угла атаки через экстремум, что для обычного линейного управления привело бы к катастрофическим последствиям в связи с изменением знака характеристики. Нелинейная система квазиמודального управления успешно справляется с этой ситуацией за счет наличия функционально зависимых коэффициентов, вошедших в ММЗУ благодаря аналитичности модели, полученной методом CGA. Фактическая адаптация квазиמודального закона стабилизации хорошо иллюстрируется таблицей 2. При возмущениях 1^0 и 5^0 , когда ориентация дирижабля практически не выходит за границы левой восходящей полуветви (см. рис. 1), переходные процессы имеют одинаковый вид и отличаются только параметрами: при большем возмущении - большие отклонения. При возмущениях 8^0 и 10^0 , когда ориентация дирижабля переходит на правую нисходящую полуветвь, характер процессов существенно меняется, т.к. она имеет не только противоположный наклон (см. рис. 1), но и большую крутизну, благодаря чему лифтинг не возрастает, а, практически мгновенно, падает. Однако система с этой метаморфозой успешно справляется.

Заключение

1. В данной работе показано, что направление применения метода Cut-Glue аппроксимации к задачам построения нелинейных систем автоматического управления, развиваемое рабочей группой, созданной в ДГТУ и работающей с привлечением ученого из ЮФУ, весьма перспективно.

2. Метод позволяет создавать математические модели существенно нелинейных объектов с высокой количественной точностью, т.к. допускает «кусочное» разбиение аппроксимируемых характеристик на фрагменты, но, при этом, обеспечивает представленные конечной ММ аналитическими функциями.

3. Показано, что при использовании для описания фрагментов в методе CGA степенных полиномов, возникает возможность преобразовать получаемую единую аналитическую функцию в квазилинейную форму, что открывает широкие возможности для применения методов аналитического синтеза нелинейных систем управления, в частности, хорошо себя зарекомендовал метод синтеза квазимодального управления.

4. Приведенный пример синтеза системы автоматической стабилизации высоты полета дирижабля со сложной экстремальной характеристикой канала управления, терпящей разрыв по производной, показал, что синтезированный закон стабилизации высоты полета, несмотря на существенную нелинейность объекта управления, сохраняет работоспособность в широком диапазоне амплитуд подавляемых возмущений.

5. Полученный результат показывает необходимость исследования других путей приведения результатов метода CGA к квазилинейной форме, других методов нелинейного синтеза, позволяющих использовать результаты применения CGA для экспериментального построения ММ объектов управления, а также практически проверить возможность применения метода для синтеза многомерных законов нелинейного управления.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ по договору № 18-08-01178\19.

Литература

1. Chi-Tsong Chen Linear system theory and design, Oxford University Press, New York, 1999, 334 p., ISBN 0-19-511777-8
 2. Melin P., Castillo O. Modeling, Simulation and Control of Non-linear Dynamical Systems: An Intelligent Approach Using Soft Computing and Fractal Theory // Boca Raton [etc.]: Taylor & Francis. – 2002. – 256 p.
 3. Buzzi-Ferraris G., Manenti F. Nonlinear Systems and Optimization for the Chemical Engineer: Solving Numerical Problems // Weinheim, Germany: Wiley, 2014. – 524 p.
 4. Гайдук А.Р., Капустян С.Г., Шаповалов И.О. Алгоритм управления движением группы мобильных роботов в условиях неопределенности // Инженерный вестник Дона, 2018, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5221
 5. Лунев В.А. Математическое моделирование и планирование эксперимента: Учебное пособие. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2012. 153 с.
 6. Loran P.-J. Approximation and optimization, Moscow, World Publisher, 1975, 496 p.
 7. Micula G., Micula S. Hand Book of Splines, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, London, Boston, 1999.- 605 p.
 8. Neydorf R., Neydorf A., Vučinić D. “Cut-Glue” Approximation Method for Strongly Nonlinear and Multidimensional Object Dependencies Modeling// Advanced Structured Materials, 2018, T. 72. URL: elibrary.ru/item.asp?id=31067939.
 9. Naidu D.S. Optimal control systems // Boca Raton [etc.]: CRC Press. – 2003. - 433 p.
-



10. Гайдук А. Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления: (полиномиальный подход): монография. М.: Издательство Физматлит, 2012, с. 249.
 11. Gaiduk A.R., Neydorf R.A., Kudinov N.V. (2020) Application of Cut-Glue Approximation in Analytical Solution of the Problem of Nonlinear Control Design. In: Kravets A., Bolshakov A., Shcherbakov M. (eds) Cyber-Physical Systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control, vol 260. Springer, Cham.
 12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том №3. М. Наука, 1966, с. 45.
 13. Гайдук А.Р. к синтезу квазилинейных гурвицевых систем управления. Труды СПИИРАН. 2019; 18(3):678-705, doi.org/10.15622/sp.2019.18.3.677-704
 14. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю., Федоренко Р.В. Управление воздухоплавательными комплексами: теория и технологии проектирования // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 394 с.
 15. Sen A., Srivastava M., Regression Analysis — Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2011 (4th printing), p. 7.
 16. Нейдорф Р.А., Полях В.В. Технология полиномиального фрагментарного регрессионного описания экспериментальных данных в методе «Cut-Glue» аппроксимации // Инженерный вестник Дона, 2018, №3. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_161_Neydorf_Poliakh.pdf_e0e0f3dcb4.pdf
 17. Khalil H. K. Nonlinear Systems, third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, 766 p. URL: en.bookfi.net/book/1417228.
 18. Banerjee S. Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications // Boca Raton [etc.]: CRC Press, 2014. – 276 p.
 19. Barnes B., Fulford G.R. Mathematical Modeling with Case Studies: Using Maple and MATLAB // Boca Raton [etc.]: CRC Press, 2015. – 383 p.
-



20. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation // Košice, Slovak Republic: Springer, 2011. – 218 p.

References

1. Chi-Tsong Chen Linear system theory and design, Oxford University Press, New York, 1999, 334 p., ISBN 0195117778.
2. Melin P., Castillo O. Boca Raton [etc.]: Taylor & Francis. 2002. 256 p.
3. Buzzi-Ferraris G., Manenti F. Weinheim, Germany: Wiley, 2014. 524 p.
4. Gayduk A.R., Kapustyan S.G., Shapovalov I.O. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5221
5. Lunev V.A. Matematicheskoye modelirovaniye i planirovaniye eksperimenta [Mathematical modeling and experiment planning], SPb: Izdatel'stvo Politekhnicheskogo universiteta, 2012. 153 p.
6. Loran P.-J. Approximation and optimization, Moscow, World Publisher, 1975, 496 p.
7. Micula G., Micula S. Hand Book of Splines, Dordrecht, London, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999, 605 p.
8. Neydorf R., Neydorf A., Vučinić D. Advanced Structured Materials, 2018, T. 72. URL: elibrary.ru/item.asp?id=31067939.
9. Naidu D.S. Optimal control systems. Boca Raton [etc.]: CRC Press. 2003. 433 p.
10. Gayduk A.R. Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya, polinomial'nyy podkhod [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems, polynomial approach]. M.: Izdatel'stvo Fizmatlit, 2012, p. 249.
11. Gaiduk A.R., Neydorf R.A., Kudinov N.V. (2020) Application of Cut-Glue Approximation in Analytical Solution of the Problem of Nonlinear Control Design. In: Kravets A., Bolshakov A., Shcherbakov M. (eds) Cyber-Physical Systems:



- Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control, vol 260. Springer, Cham
12. Fikhtengol'ts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya [Differential and Integral Calculus Course], vol. 3. M.: Nauka, 1966, p. 45.
 13. Gayduk A.R. SPIIRAS Proceedings. 2019; 18(3): p. 678-705, doi.org/10.15622/sp.2019.18.3.677-704
 14. Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Fedorenko R.V. Upravleniye vozdukhoplavatel'nymi teoriya i tekhnologii proyektirovaniya [Management aeronautical systems: theory and technologies engineering]. M.: FIZMATLIT, 2010. 394 p.
 15. Sen A., Srivastava M. Regression Analysis. Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2011 (4th printing), p. 7.
 16. Neydorf R.A., Polyakh V.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5204
 17. Khalil H. K. Nonlinear Systems, third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, 766 p. URL: en.bookfi.net/book/1417228.
 18. Banerjee S. Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications. Boca Raton [etc.]: CRC Press, 2014. 276 p.
 19. Barnes B., Fulford G.R. Mathematical Modeling with Case Studies: Using Maple and MATLAB. Boca Raton [etc.]: CRC Press, 2015. 383 p.
 20. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. Košice, Slovak Republic: Springer, 2011. 218 p.