



## Развитие методов вычисления концентрации наночастиц в прозрачных жидкостях под действием лазерного излучения

В.И. Крылов<sup>1</sup>, Э.М. Вихтенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск

<sup>2</sup>Тихоокеанский государственный университет

**Аннотация:** В работе проводится исследование усовершенствования методов вычисления концентрации наночастиц в прозрачных жидкостях под действием лазерного излучения. Анализируется точное решение третьей краевой задачи для уравнения Эйнштейна–Фоккера–Планка, прямое использование которого в системе компьютерной алгебры Maple приводит к вычислительным неустойчивостям при больших значениях параметра переноса. Представлено решение проблемы нестабильных численных расчётов при высоких значениях безразмерных параметров, приводящих к существенным искажениям результата. Ключевым результатом является расширение рабочего диапазона параметра переноса и обеспечение корректного асимптотического поведения решения. Численные эксперименты подтвердили эффективность предложенного подхода, что делает его ценным инструментом для моделирования и оптимизации процессов лазерной сепарации наночастиц.

**Ключевые слова:** наносуспензия, лазерное излучение, концентрация наночастиц, уравнение непрерывности, третья краевая задача, компьютерные вычисления, Maple.

### Введение

В настоящее время существует ряд научных направлений, связанных с распределением наночастиц или других малых объектов в прозрачных средах под действием внешних сил. Разделение частиц в наножидкостях представляет собой актуальную задачу в ряде приложений, таких как биотехнология, медицина и промышленность. Важность этого процесса обусловлена широким распространением нанодисперсных материалов, которые используются в диагностике заболеваний, доставке лекарств и создании новых функциональных покрытий. В качестве примеров можно привести задачу формирования двумерных кристаллов [1], разработку технологии сепарации микрочастиц полиэтилена из водных растворов [2], внедрение методов направленной доставки лекарств с использованием магнитных наночастиц [3], получение высокостабильных коллоидных



растворов для синтеза неорганических композитов и керамики [4], а также инновационные разработки в области наноколлоидной химии, позволяющие создавать эффективные сорбенты и катализаторы [5]. В обзоре [6] приведен сравнительный анализ современных методов, включая использование оптического пинцета, которые обеспечивают неразрушающее манипулирование частицами для аналитических и биотехнологических применений.

Одним из ключевых направлений является использование оптических методов манипулирования частицами, среди которых выделяется лазерное облучение, способствующее эффективному контролю над перемещением и пространственным расположением наночастиц. Примером успешного внедрения метода является работа исследователей, предложивших использование оптических ловушек для эффективной сортировки и захвата частиц [7]. Другое важное достижение заключается в применении оптических ловушек непосредственно внутри живых организмов, что позволило детально изучать механические свойства клеток и тканей, не повреждая исследуемые объекты [8]. В обзоре [9] детально рассматривается теория оптических сил (градиентной и силы светового рассеяния) и их применение для манипулирования микро- и нанообъектами различной формы в физике, нанотехнологиях, биологии и даже в космосе [10].

Помимо точечного манипулирования, сила светового давления лазерного излучения может быть использована для управления коллективным поведением наночастиц в суспензиях. Теоретические работы, посвященные моделированию массопереноса, демонстрируют, что лазерное поле можно применять для эффективного осаждения наночастиц как альтернативы центрифугированию [11]. Более того, показано, что воздействие интенсивным лазерным излучением на полидисперсные суспензии позволяет проводить селективную сепарацию частиц по размеру,



изменяя их исходное распределение в объёме и выделяя фракции в зависимости от мощности излучения [12].

Исследователи экспериментально изучают изменение концентрации наночастиц в процессе воздействия света различной интенсивности и спектрального состава. Однако ключевую роль в интерпретации экспериментов и предсказании новых эффектов играют теоретические модели. Одним из подходов к изучению динамики распределения наночастиц является использование уравнения непрерывности Эйнштейна-Фоккера-Планка. Решение данного уравнения требует знания начальных условий и граничных ограничений, задаваемых особенностями физической ситуации.

Цель данной работы – разработка усовершенствованного метода расчета концентрации наночастиц в жидких средах под воздействием лазерного излучения, обеспечивающего повышение точности и расширение пределов применимости полученного ранее решения.

### Постановка задачи исследования

В экспериментальных исследованиях рассматривается однородная (до воздействия на нее излучения лазера) суспензия из наночастиц и прозрачной жидкости, находящейся в расположенной вертикально кювете высотой  $l$ , на которую, начиная с некоторого момента времени, действует интенсивное электромагнитное излучение. Причем предполагается, что электромагнитное излучение направлено нормально к горизонтальному сечению кюветы, и его интенсивность во всех точках пространства одинаковая, поэтому концентрацию частиц можно считать функцией только от двух переменных – координаты  $\bar{z}$ , направленной нормально к горизонтальному сечению кюветы ( $\bar{z}$  совпадает с направлением излучения лазера), и времени  $\bar{t}$ :  $n = n(\bar{z}, \bar{t})$ . В дальнейшем считаем, что начальная точка  $\bar{z} = 0$  совпадает с верхней поверхностью жидкости, а при  $\bar{t} = 0$  распределение частиц однородно,

$n(\bar{z}, 0) = n_0$ . Задача экспериментаторов заключается в определении концентрации таких наночастиц в различные моменты времени в некоторых сечениях кюветы, параллельных ее дну.

Так как наночастицы суспензии ведут себя как броуновские частицы, то из уравнения Эйнштейна – Фоккера – Планка следует, что функция  $n = n(\bar{z}, \bar{t})$  является решением третьей начально-краевой задачи для уравнения непрерывности [11, 13]:

$$\frac{\partial n}{\partial \bar{t}} = D \frac{\partial^2 n}{\partial \bar{z}^2} - v \frac{\partial n}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{z} \in (0, l), \quad \bar{t} > 0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$vn - D \frac{\partial n}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{при } \bar{z} = 0 \text{ или } \bar{z} = l, \quad \bar{t} \geq 0 \quad (2)$$

и начальным условием:

$$n(\bar{z}, 0) = n_0, \quad \bar{z} \in [0, l]. \quad (3)$$

Здесь постоянные параметры  $D$  и  $v$  – коэффициент диффузии и скорость частиц, определяемая их систематическим смещением под действием постоянной силы, направленной вдоль координаты  $\bar{z}$ . Решение задачи (1)-(3), как было показано в [13], можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} \frac{n(z, t)}{n_0} = & u \frac{e^{uz}}{(e^u - 1)} + \\ & + ue^{0.5uz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(m\pi)^2 [1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{((m\pi)^2 + u^2/4)^2} y_m(z) e^{-((m\pi)^2 + u^2/4)t}, \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) введены безразмерные величины  $z = \bar{z}/l$ ,  $t = D\bar{t}/l^2$ ,  $u = vl/D$  и

$$y_m(z) = \frac{u}{2m\pi} \sin(m\pi z) + \cos(m\pi z).$$

Для сравнения результатов теории и эксперимента необходимо вычислять значения выражения (4) при различных конкретных  $z$  и  $t$  при заданном значении  $u$ . Для вычислений можно использовать системы компьютерной математики, например, MAPLE. Однако, как было показано

ранее [14], при  $u > 50$  непосредственные вычисления в MAPLE приводят к ошибкам, связанным со спецификой выполнения компьютерных операций с числами. В таком случае требуется провести предварительное преобразование (4) к виду, пригодному для вычислений.

Одно из таких преобразований в [14] построено на использовании начального условия (3) в форме:

$$\frac{n(z, 0)}{n_0} = 1. \quad (5)$$

В результате преобразований получено выражение:

$$\begin{aligned} \frac{n(z, t)}{n_0} = 1 + 2ue^{0.5uz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)} y_m(z) [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1] - \\ - \frac{u^3}{2} e^{0.5uz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} y_m(z) [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Как показали дальнейшие вычисления с использованием MAPLE, формула (6) и ее модификации, полученные в [14], при  $z = 0$  и  $z = 0.5$  могут быть использованы только на малых интервалах времени:

$$t \in [0, \varepsilon(u)], \quad (7)$$

где  $\varepsilon(u)$  – малая величина, зависящая от  $u$  и  $z$ .

При  $t = 0$  значение правой части (6) равно единице, а с увеличением  $t$  монотонно убывает, но при  $t > \varepsilon(u)$  не стремится к асимптотическому значению:

$$M = \frac{ue^{uz}}{e^u - 1},$$

которому функция (4) должна быть равна при  $t = \infty$ . Например, при значениях  $u = 200$  или  $u = -500$  функции  $n(0, t)/n_0$  и  $n(0.5, t)/n_0$  стремятся к величине порядка  $10^{-7}$ , что значительно превышает  $M$ .

Здесь следует заметить, что для наносуспензий физический смысл имеют значения:



$$\frac{n(z,t)}{n_0} \geq 10^{-14}. \quad (8)$$

Действительно, если собственный объем наночастиц составляет 1% объема жидкости, а объем одной наночастицы равен  $10^{-21}$  см<sup>3</sup>, то  $n_0$  – величина порядка  $10^{19}$ . Уравнение (1), решением которого является  $n(z,t)$ , получено на основе принципов статистической физики или гидродинамики, т.е. подразумевается, что в единице объема жидкости должно быть макроскопическое число частиц. Условие (8) обеспечивает оценку  $n(z,t) \sim 10^5$ , что можно считать макроскопическим числом. Однако для того, чтобы быть уверенным в правильном вычислении  $n(z,t)$ , необходимо получить весь спектр значений этой функции, даже в той области, где она не имеет физический смысл, если считать, что наночастицы непрерывно распределены по объему кюветы.

В настоящей работе найдены такие представления выражения (4), которые позволяют использовать программу MAPLE для  $z = 0$ ,  $z = 0.5$  и произвольных  $t$  при  $u \leq 1000$ . При  $u = 500$  построены графики  $n(0,t)/n_0$  и  $n(0.5,t)/n_0$ , значения которых, начиная с некоторых  $t > \varepsilon$ , заметно отличаются от значений соответствующих функций в [14] и которые стремятся к величине  $M$  при больших  $t$ .

При  $z = 1$  представления, полученные в [14] и в настоящей работе, дают близкие численные результаты при  $u \leq 2000$ , тогда как с использованием выражения (8) из [14] получаются разумные результаты при  $u \leq 4500$ .

## Аналитические преобразования

Оказывается, что если в преобразованиях не использовать условие (5), но провести в (4) остальные, использованные в [14] преобразования, то вычисленные в MAPLE значения функции (4) для  $z = 0$  и  $z = 0.5$  будут асимптотически приближаться к  $M$  при стремлении  $t$  к бесконечности.

Проведем преобразования выражения (4), аналогичные выполненным в [14], не используя условие (5).

Прибавим и вычтем в числителе суммы (4) выражение  $2u^2/4$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{n(z,t)}{n_0} = & u \frac{e^{uz}}{(e^u - 1)} + 2ue^{0.5uz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)} y_m(z) e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - \\ & - \frac{u^3}{4} e^{0.5uz} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} y_m(z) e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Дальнейшие преобразования (9) зависят от выбора значения  $z$ .

Рассмотрим случай  $z = 0$ . Тогда  $y_m(0) = 1$  и нетрудно понять, что выражение (9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{n(0,t)}{n_0} = & \frac{u}{(e^u - 1)} + u \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m e^{-0.5u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)} e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - \\ & - \frac{u^3}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} + \\ & + \frac{u^3}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m e^{-0.5u}}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) можно использовать для вычислений в MAPLE при  $t > \varepsilon_0(u)$ . Отметим, что на некотором интервале  $0 < t < \varepsilon(u)$  численные значения, полученные с использованием выражения (10) и соответствующей формулы работы [14], совпадают с точностью до первой или даже второй значимой цифры. При дальнейшем увеличении  $t$  разность между значениями этих выражений растет, причем (10) быстро стремится к  $M$  (см. ниже).

Пусть теперь  $z = 0.5$ . При подстановке этого значения непосредственно в (4) с конкретными  $u$  и  $t$  (например,  $u = 200$ ,  $t = 0,01$ ), команда evalf в MAPLE, при суммировании по  $m$  до бесконечности запишет выражение (4) в символьическом виде и прекратит вычисления. Однако если в рядах

выражения (9) проводить суммирование отдельно по нечетным  $m = 2k + 1$  и четным  $m = 2n$  слагаемым ( $k=0, 1, 2, \dots, n=1, 2, \dots$ ), то команда evalf в MAPLE проводит вычисления до конца, даже когда верхний предел в суммах равен бесконечности.

Учитывая, что:

$$y_{2k+1}(0.5) = (-1)^k \frac{u}{2\pi(2k+1)}, y_{2n}(0.5) = (-1)^n$$

и используя обозначения:

$$a = (u^2/\pi)[e^{u/4} + e^{-u/4}], b = 2u[e^{u/4} - e^{-u/4}],$$

исходя из (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{n(0.5, t)}{n_0} = & u \frac{e^{0.5u}}{(e^u - 1)} + a \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m(m^2\pi^2 + u^2/4)} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t}] - \right. \\ & \left. - \frac{u^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t}] \right\} + \\ & + b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2\pi^2 + u^2/4)} [e^{-(4n^2\pi^2 + u^2/4)t}] - \right. \\ & \left. - \frac{u^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2\pi^2 + u^2/4)^2} [e^{-(4n^2\pi^2 + u^2/4)t}] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $m = 2k + 1$ .

Формулу (11) можно использовать для вычисления значений  $n(0.5, t)/n_0$  при  $t > \varepsilon(u)$ .

Теперь рассмотрим случай  $z = 1$ . Тогда, исходя из формулы (4), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{n(1, t)}{n_0} = & u \frac{e^u}{(e^u - 1)} + \\ & + ue^{0.5u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(m\pi)^2[1 - (-1)^m e^{-u}]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} y_m(1) e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t}. \end{aligned}$$

Так как  $y_m(1) = (-1)^m$ , то из последней формулы следует:

$$\begin{aligned} \frac{n(1,t)}{n_0} &= u \frac{e^u}{(e^u - 1)} + 2u \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^m e^{0.5u} - 1]}{\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)} e^{-\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)t} - \\ &\quad - \frac{u^3}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^m e^{0.5u} - 1]}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} e^{-\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)t} = \\ &= u \left\{ \frac{e^u}{(e^u - 1)} + 2e^{0.5u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)} e^{-\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)t} - \right. \\ &\quad - 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)} e^{-\left(m^2\pi^2 + \frac{u^2}{4}\right)t} + \\ &\quad - \frac{u^2}{2} e^{0.5u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} + \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{2} \sum_{m=1}^N \frac{1}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оказалось, что при использовании MAPLE выражение (12) и соответствующая формула работы [14]:

$$\begin{aligned} \frac{n(1,t)}{n_0} &= 1 + 2ue^{0.5u} \left\{ \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m}{(m^2\pi^2 + u^2/4)} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1] - \right. \\ &\quad - \frac{u^2}{4} \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1] \left. \right\} - \\ &\quad - 2u \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2\pi^2 + u^2/4)} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u^2}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2\pi^2 + u^2/4)^2} [e^{-(m^2\pi^2 + u^2/4)t} - 1] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

дают близкие результаты вплоть до значений  $u = 2000$  при всех  $t$  и  $N = 10^5$  или больших. Однако выражение (13) позволяет находить правильные

численные значения при  $t \geq 0$  с использованием MAPLE если  $u \leq 4500$ , тогда как применение формулы (12) ограничено верхним значением  $u$ , близким к 2000.

### Результаты численных экспериментов

Для оценки эффективности расчетов по полученным формулам проведен ряд численных экспериментов.

В первой серии расчетов  $u = 500$ . Значения функции  $n(1, t)/n_0$ , полученные в [14] (с использованием формулы (13)) и с использованием (12) очень близки и асимптотически стремятся к величине  $M$ .

На рис. 1 показан график функции  $n(0, t)/n_0$ . Первые три точки графика вычислены по формуле работы [14]. Начиная с  $t=0,000039$  до  $t=0,00015$ , вычисления проводятся также с использованием выражения (10). Полученные величины при значениях  $t$  из интервала  $[0,0000404; 0,000042]$  близки, относительные различия между ординатами этих точек приблизительно 7%.

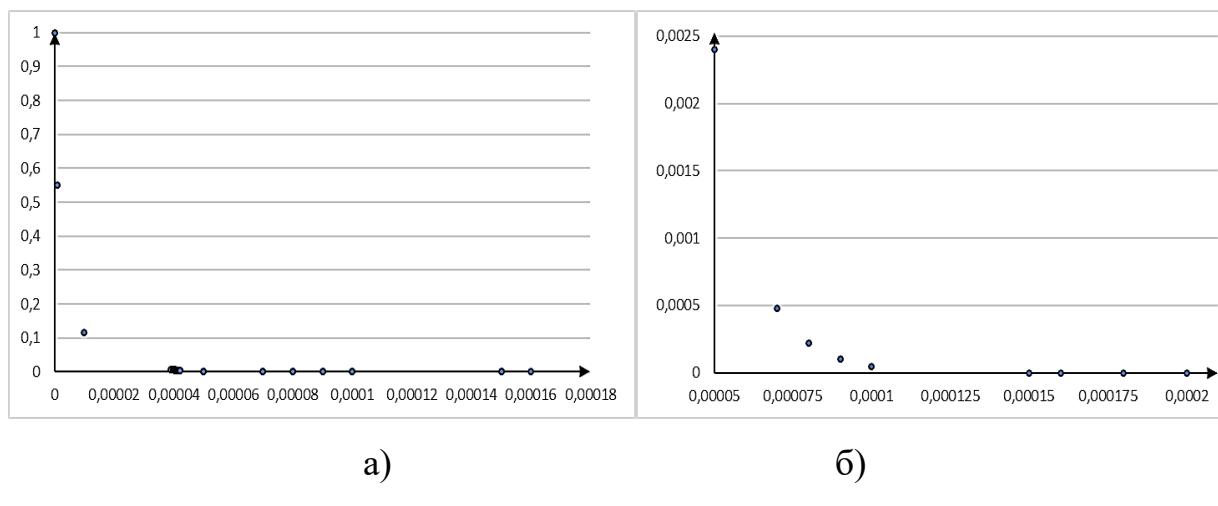


Рис. 1. – Графики функции  $n(0, t)/n_0$  при  $u = 500$  на разных интервалах  $t$ :  
а)  $t \in [0; 0,00018]$ ; б)  $t \in [0,00005; 0,0002]$

На рис. 2 изображен график функции  $n(0.5, t)/n_0$  при  $t \in [0; 0,008]$  и  $u = 500$ . Здесь при выполнении расчетов также, как и ранее, использовались

разные формы представления функции  $n(z, t)/n_0$ . В тех диапазонах времени, в которых удается провести вычисления по обеим формулам (12) и (13), полученные значения практически совпадают.

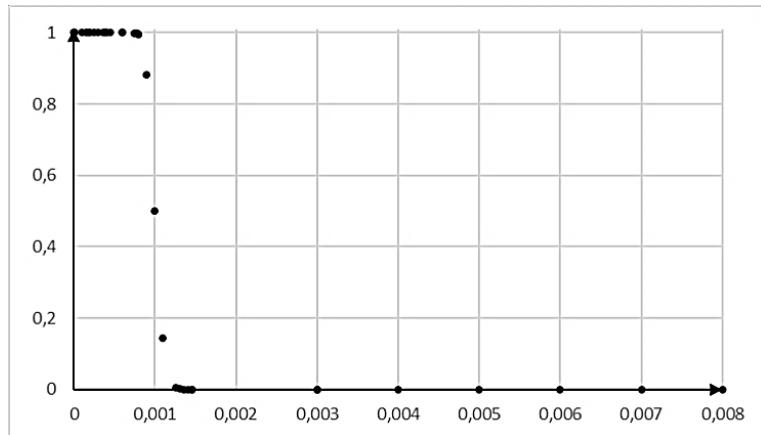


Рис. 2. – График функции  $n(0.5, t)/n_0$  при  $t \in [0; 0,008]$  и  $u = 500$

На рис. 3 и 4 представлены графики функции  $n(z, t)/n_0$  при  $z=1$ , то есть на дне кюветы с наносусpenзией, величина  $u = 2000$  (рис. 3) и  $u = 4500$  (рис. 4). Как можно видеть, наночастицы очень быстро оседают на дне, функция  $n(1, t)/n_0$  стремится к максимальному значению  $M$ , причем в начальный момент времени скорость роста небольшая, а затем резко увеличивается (рис. 3б).

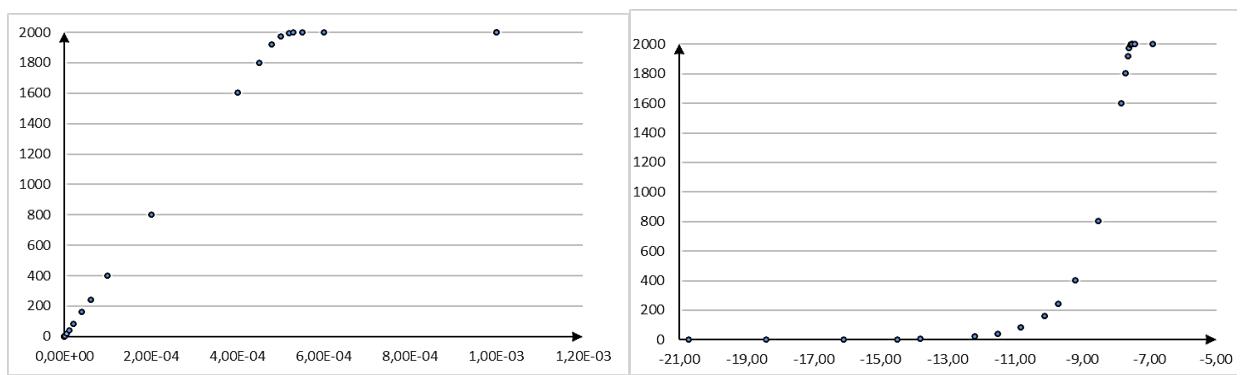


Рис. 3. – График функций  $n(1, t)/n_0$  при  $t \in [10^{-9}; 10^{-3}]$  и  $u = 2000$

а) в координатах  $(t; n(1, t)/n_0)$ ; б) в координатах  $(\ln(t); n(1, t)/n_0)$



Рис.4. – График функции  $n(1, t)/n_0$  при  $t \in [0; 0,001]$  и  $u = 4500$

Для построения графиков рис. 3 и рис. 4 использована форма (13), позволяющая проводить вычисления для достаточно больших  $u$ . Таким образом в ходе вычислительных экспериментов показано, что, найденное в работе [14] преобразование точного решения уравнения (1) с использованием начального условия (5) (форма (13)) можно применять для вычислений функции  $n(1, t)/n_0$  при  $z = 1$  в более широком интервале параметра  $u$ , чем выражение (14).

Однако дальнейшие проведенные численные исследования, которые здесь не приводим, показывают, что полученные как в настоящей работе, так и в [14], преобразования нельзя использовать при  $u$  порядка больше  $10^6$ .

### Заключение

В работе проведено исследование, направленное на преодоление вычислительных трудностей, возникающих при моделировании пространственно-временного распределения наночастиц в наносусpenзии при воздействии лазерного излучения. Показано, что прямое использование ряда в формуле с целью решения третьей начально-краевой задачи для уравнения непрерывности в системе компьютерной математики MAPLE приводит к значительным погрешностям и невозможности получить



---

корректную асимптотику при больших значениях безразмерного параметра переноса  $u$ .

Разработанные в данной работе модифицированные представления решения для  $z = 0$  и  $z = 0,5$  позволили значительно расширить диапазон устойчивых вычислений. Ключевым отличием от подхода, предложенного ранее, явился отказ от преждевременного использования начального условия, что обеспечило правильное асимптотическое поведение полученного решения. Для случая  $z = 1$  подтверждена эффективность формулы из предыдущих работ авторов.

Результаты работы, представленные в виде серии графиков, наглядно демонстрируют изменение концентрации наночастиц и подтверждают адекватность предложенных методов. Полученные аналитические формы решения являются эффективным инструментом для прогнозирования поведения нанодисперсных систем в прикладных задачах, связанных с лазерным воздействием. Практическая значимость работы заключается в создании надежного математического аппарата для интерпретации экспериментальных данных по лазерной сепарации наночастиц и проектирования соответствующих технологических установок. Разработанные формулы позволяют с высокой точностью прогнозировать динамику концентрации в прозрачной среде, что необходимо для оптимизации процессов в биотехнологии и материаловедении. Перспективы дальнейших исследований видятся в разработке асимптотических методов и специализированных численных алгоритмов для работы в областях параметров, где классические представления в виде рядов становятся неэффективными.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, дополнительное соглашение от 27 февраля 2025 г. № 075-02-2025-1538.*

---



## Литература

1. Duhr S. Two-dimensional colloidal crystals formed by thermophoresis and convection // Applied Physics Letters. 2005. Vol. 86. P. 131921. DOI: 10.1063/1.1888036.
2. Филинкова М.С., Бахтеева Ю.А., Медведева И.В. и др. Агрегатообразование и магнитная сепарация микрочастиц полиэтилена из водных растворов // Коллоидный журнал. 2024. Т. 86. № 6. С. 824-837. DOI: 10.31857/S0023291224060146.
3. Mayorova O.A., Gusliakova O.I., Prikhozhdenko E.S. et al. Magnetic platelets as a platform for drug delivery and cell trapping // Pharmaceutics. 2023. Vol. 15. No. 1. P. 214. DOI: 10.3390/pharmaceutics15010214.
4. Кудрявцев П. Г. Получение неорганических композитов и керамики с использованием коллоидных растворов // Инженерный вестник Дона. 2018. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5333.
5. Kudryavtsev P., Kudryavtsev N., Trossman A. New directions of research and development in the field of nanotechnology for the creation and application of inorganic composite materials. Part I. // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4379.
6. Евстратов А.А. Физические методы управления движением и разделением микрочастиц в жидких средах. I. Диэлектрофорез, фотофорез, оптофорез, оптический пинцет // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 1. С. 3-20.
7. Yang Y., Ren Y.X., Chen M. et al. Optical trapping with structured light: A review // Advanced Photonics. 2021. Vol. 3. No. 3. P. 034001. DOI: 10.1117/1.AP.3.3.034001.
8. Favre-Bulle A. et al. Optical trapping in vivo: theory, practice, and applications // Nanophotonics. 2019. No 8(6). Pp. 1023-1040.



9. Polimeno P., Magazzù A., Iati M.A. et al. Optical tweezers and their applications // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2018. V. 218. P. 131-150. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2018.07.013.
10. Magazzù A., Ciriza D., Musolino A. et al. Investigation of dust grains by optical tweezers for space applications // The Astrophysical Journal. 2022. V. 942(1). P. 11. DOI: 10.3847/1538-4357/ac9a45.
11. Иванов В.И., Иванова Г.Д., Крылов В.И., Хе В.К. Осаждение наночастиц под действием сил светового давления в жидких средах // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2018. Вып. 10. С. 286-290.
12. Иванов В.И., Пячин С.А. Сепарация частиц в полидисперсной наносусpenзии в поле лазерного излучения // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2021. № 13. С. 146-155. DOI: 10.26456/pcascnn/2021.13.146.
13. Krylov V.I., Rukhadze A.A., Nefedov V.I. On a partial solution of the diffusion equation // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2017. T. 44. № 2. C. 36-39.
14. Крылов В.И., Вихтенко Э.М. Некоторые особенности результатов компьютерных вычислений при нахождении частного решения третьей краевой задачи уравнения диффузии // Вестник ТОГУ. 2025. № 2. С. 87-98.

## References

1. Duhr S., Braun D. Applied Physics Letters. 2005. Vol. 86. P. 131921.
2. Filinkova M.S., Bakhteeva Yu.A., Medvedeva I.V. [i dr.] Kolloidnyy zhurnal. 2024. T. 86. № 6. Pp. 824-837.
3. Mauogova O.A., Gusliakova O.I., Prikhozhdenko E.S. [et al.] Pharmaceuticals. 2023. Vol. 15. No. 1. P. 214.
4. Kudryavtsev P.G. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5333



5. Kudryavtsev P., Kudryavtsev N., Trossman A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4381
6. Esemakhov A.A. Nauchnoe priborostroenie. 2005. Т. 15. № 1. Pp. 3-20.
7. Yang Y., Ren Y.X., Chen M. [et al.] Advanced Photonics. 2021. Vol. 3. No. 3. P. 034001.
8. Favre-Bulle A. [et al.] Nanophotonics. 2019. Vol. 8. No. 6. P. 1023-1040.
9. Polimeno P., Magazzù A., Iati M. A. [et al.] Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2018. V. 218. P. 131-150.
10. Magazzù A., Ciriza D., Musolino A. [et al.] The Astrophysical Journal. 2022. V. 942(1). P. 11.
11. Ivanov V.I., Ivanova G.D., Krylov V.I., Khe V.K. Fiziko-khimicheskie aspekty izucheniya klasterov, nanostruktur i nanomaterialov. 2018. Vyp. 10. Pp. 286-290.
12. Ivanov V.I., Pyachin S.A. Fiziko-khimicheskie aspekty izucheniya klasterov, nanostruktur i nanomaterialov. 2021. № 13. Pp. 146-155.
13. Krylov V.I., Rukhadze A.A., Nefedov V. I. Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2017. Т. 44. № 2. Pp. 36-39.
14. Krylov V.I., Vikhtenko E.M. Vestnik TOGU. 2025. № 2. Pp. 87-98.

**Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.**

**Дата поступления: 21.11.2025**

**Дата публикации: 26.12.2025**