

Моделирование 3-ткани для минимальных поверхностей

Ю.М. Бельченко, Н.М. Шумун

Ростовский государственный университет путей сообщений

Аннотация: В пространстве задана некоторая замкнутая кривая; среди всех возможных поверхностей, проходящих через эту кривую, найти такую, для которой часть её, заключённая внутри кривой, имела бы наименьшую площадь. Кривизна произвольной кривой на поверхности в заданной ее точке равна кривизне плоского сечения поверхности соприкасающейся плоскостью кривой.

Ключевые слова: минимальные поверхности, моделирование, 3-ткань, кривизна поверхности, уравнение средней кривизны.

Минимальными называются поверхности, у которых средняя кривизна во всех точках равна нулю. Минимальные поверхности появляются при решении следующей вариационной задачи: *в пространстве задана некоторая замкнутая кривая; среди всех возможных поверхностей, проходящих через эту кривую, найти такую, для которой часть её, заключённая внутри кривой, имела бы наименьшую площадь.*

Условие равенства 0 средней кривизны не является достаточным, т. е. не гарантирует минимума площади, однако впоследствии название «*минимальные поверхности*» было сохранено за всякой поверхностью с нулевой средней кривизной. Если предположить поверхность заданной явным уравнением $z = f(x, y)$, то, приравнявая нулю выражение для средней кривизны, приходят к дифференциальному уравнению с частными производными 2-го порядка:

$$(1 + q^2) \cdot r - 2pqs + (1 + p^2) \cdot t = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Примерами минимальных поверхностей могут служить: обыкновенная винтовая поверхность, катеноид – единственная вещественная; среди поверхностей вращения – «поверхность Шерка», имеющее уравнение вида:

$$z = \ln \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Условие минимальности поверхности определяется уравнением

$$D \cdot G + D'' \cdot E - 2 \cdot F \cdot D' = 0,$$

где G, E, F – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, D, D', D'' – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Заявленная задача сформулирована следующим образом. Пространственную кривую перекрываем 3-тканью. Определим условие, при котором полученная поверхность будет минимальной.

Выберем в качестве направляющей кривую Вивиани (линия пересечения сферы и кругового цилиндра) (рис. 1).

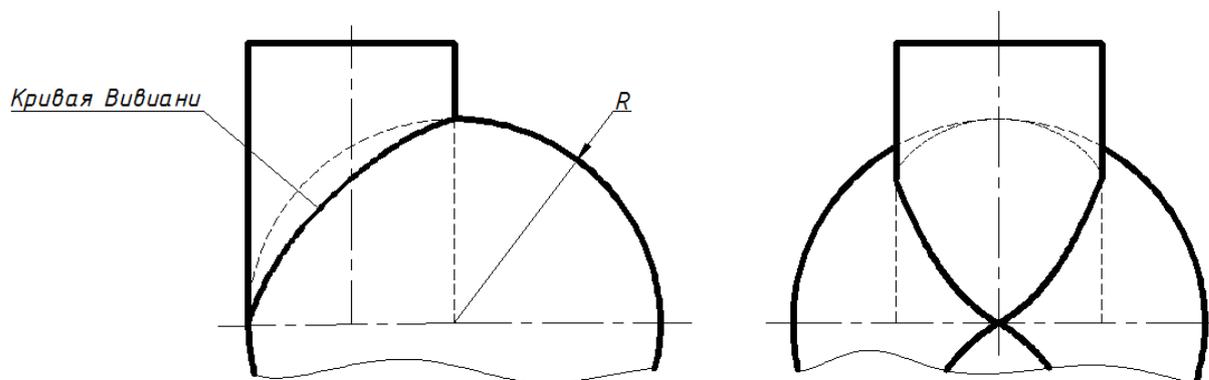


Рис. 1. – Чертеж кривой Вивиани

Уравнение кривой Вивиани имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4},$$

$$z \geq 0,$$

где R – радиус сферы.

Рассмотрим пространственную 3-ткань с независимыми дифференциальными операторами

$$\partial_j = p_j \cdot \frac{\partial}{\partial x} + q_j \cdot \frac{\partial}{\partial y} + r_j \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1)$$

где $j=1, 2, 3$.

В каждой точке поверхности пересекаются три кривые разных семейств 3-ткани (рис. 2).

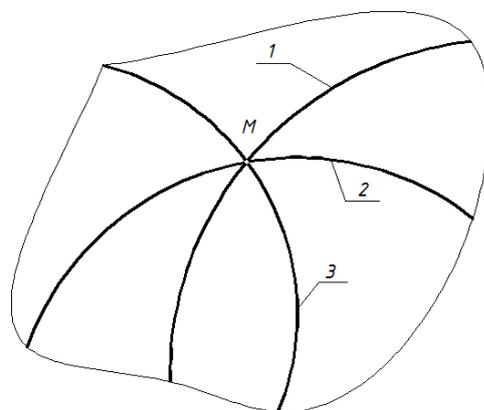


Рис. 2. – Три-ткань на поверхности

Средняя кривизна такой поверхности должна быть равна 0 по определению минимальной поверхности. Выражение средней кривизны для 3-ткани запишется так:

$$H = k_1 + k_2 + k_3, \quad (2)$$

где k_1, k_2, k_3 – главные кривизны линий 1-го, 2-го и 3-го семейств.

Если записать выражение средней кривизны поверхности через коэффициенты 1-й и 2-й квадратичных форм, то оно выглядит следующим образом:

$$H = \frac{2FD' - FD'' - GD}{EG - F^2}.$$

Для того, чтобы выполнялись условия уравнения (2), необходимо, чтобы соблюдалось условие:

$$H = k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Тогда возможны следующие варианты выполнения такого условия:

$$1) k_1 + k_2 = -k_3;$$

$$2) k_1 + k_3 = -k_2;$$

$$3) k_2 + k_3 = -k_1.$$

Однако, известна теорема: «Все кривые, проходящие через данную точку поверхности с общей касательной и общей соприкасающейся плоскостью, имеют одну и те же кривизну».

Следовательно, кривизна произвольной кривой на поверхности в заданной ее точке равна кривизне плоского сечения поверхности соприкасающейся плоскостью кривой.

Для нашего случая в точке M 3-ткани (рис. 2) кривизна k_3 линии 3-го семейства будет равна кривизне k_2 линии 2-го семейства. Таким образом, из рассмотренных выше вариантов нужно выбрать следующий:

$$k_1 = -2k_2. \quad (3)$$

Из уравнения (1) можно составить систему

$$\left. \begin{aligned} \partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2 &= c_{11} \partial_1 + c_{12} \partial_2 + c_{13} \partial_3, \\ \partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3 &= c_{21} \partial_1 + c_{22} \partial_2 + c_{23} \partial_3, \\ \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 &= c_{31} \partial_1 + c_{32} \partial_2 + c_{33} \partial_3. \end{aligned} \right\}$$

Если задать 3-ткань функцией $W(u_1, u_2, u_3)$ в области ее определения уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial u_j} \neq 0,$$

тогда кривизну $k_j (j = 1, 2, 3)$ можно вычислить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} k_1 = V_2 - V_3 &= \frac{1}{W_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} \cdot \ln \frac{W_3}{W_2}, \\ k_2 = V_3 - V_1 &= \frac{1}{W_2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_2} \cdot \ln \frac{W_1}{W_3}, \\ k_3 = V_1 - V_3 &= \frac{1}{W_3} \cdot \frac{\partial}{\partial u_3} \cdot \ln \frac{W_2}{W_1}. \end{aligned} \right\}$$

или

$$k_1 = \partial_1 \cdot \ln W_1,$$

$$k_2 = \partial_2 \cdot \ln W_2,$$

$$k_3 = \partial_3 \cdot \ln W_3.$$

Учитывая уравнение (3), условие минимальности поверхности запишем следующим образом

$$\partial_1 \cdot \ln W_1 = -2\partial_2 \cdot \ln W_2,$$

$$\partial_1 \cdot \ln W_1 = -2\partial_3 \cdot \ln W_3.$$

Литература

1. Бельченко Ю.М., Шумун Н.М. Конструирование плоскостей на базе плоской шестиугольной 3-ткани // Инженерный вестник Дона, 2015, №2 (часть 2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.

2. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499.

3. Рачковская Г.С. Математическое моделирование и компьютерная визуализации сложных геометрических форм // Инженерный вестник Дона. 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1498.

4. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1987. 312 с.
5. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.
6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.
7. Жан Гастон Дарбу Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. В 4 томах. Том 1. Общие понятия. Криволинейные координаты. Минимальные поверхности. М.: Институт компьютерных исследований, 2013. 620 с.
8. Толстихина Г.А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей: автореф. дис. д-р физ.-мат. наук: 01.01.04. - Казань, 2007. - 29 с.
9. Пиджакова Л.М. Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. - Тверь, 2009. - 20 с.
10. Гольдберг В.В. О существовании паратактических три-тканей // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2008. - №4 (551). - С. 22-27.

References

1. Bel'chenko Ju.M., Shumun N.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2 (chast' 2) URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2884/.
2. Rachkovskaya G.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1499/.

3. Rachkovskaya G. S. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1498/.

4. Dao Chong Thi, Fomenko A.T. Minimal'nye poverhnosti i problema Plato. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat.lit., 1987. 312 p.

5. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometric model of kinematic surfaces on the base of one-sheet hyperboloidal surfaces of revolution (one fixed axoid is located in the interior of another axoid). Japan: 14th International Conference on Geometry and Graphics, 2010, 385 p.

6. Rachkovskaya G.S., Harabaev Ju.N. Geometrical model and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of pairs axoids: torse – cone and cone – torse. Canada, Toronto: 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012, 415 p.

7. Darbu Zh.G. Lekcii po obshhej teorii poverhnostej i geometricheskie prilozhenija analiza beskonechno malyh. V 4 tomah. Tom 1. Obshhie ponjatija. Krivolinejnye koordinaty. Minimal'nye poverhnosti. M.: Institut komp'juternyh issledovanij, 2013. 620 p.

8. Tolstikhina G.A. Algebra i geometriya tri-tkaney, obrazovannykh sloeniyami raznykh razmernostey: avtoref. dis. d-r fiz.-mat. nauk: 01.01.04 [Algebra and geometry three - the fabrics formed by sloeniye of different razmernost]. Kazan', 2007, 29 p.

9. Pidzhakova L.M. Tri-tkani s kovariantno postoyannymi tenzorami krivizny i krucheniya: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04. [Tri - fabrics with covariant constant tensors of curvature and torsion]. Tver', 2009, 20 p.

10. Goldberg V.V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika (Rus), 2008. №4 (551). URL: cyberleninka.ru/article/n/o-suschestvovanii-paratakticheskikh-tri-tkaney.