Один из возможных вариантов приближенного решения задач нелинейной теплопроводности

В.В. Иванов, Л.В. Карасева

Донской государственный технический университет
Ростов – на – Дону

Аннотация: Описывается приближенный метод расчета температурного поля в твердых телах, прогреваемых конвекцией и радиацией одновременно, когда теплофизические свойства вещества зависят от температуры. Метод основан на комплексном использовании линеаризующих функций и приемов численного анализа. В работе представлен пример расчета радиационно-конвективного прогрева неограниченной пластины, в процессе которого теплоемкость и теплопроводность материала меняются вместе с температурой. Полученные результаты хорошо согласуются с данными расчета по методу конечных разностей. Статья опубликована в рамках реализации программы Международного Форума «Победный май 1945 года».
Ключевые слова: температурное поле, радиационно-конвективный нагрев, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости, линеаризующее преобразование

Важным разделом современной науки, имеющим большое практическое значение, является теория переноса тепла в твердых телах, подвергающихся высокотемпературному нагреву. Это – процессы прогрева тел радиацией, радиацией и конвекцией одновременно, а также нагрев тел, когда теплофизические характеристики материала меняются вместе с температурой. При исследовании этих процессов приходится решать задачи нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями, а также переменными свойствами материала. Поэтому одна из основных проблем теории теплопроводности состоит в разработке методов определения температурных полей и тепловых потоков при указанных выше условиях.

Поскольку точные аналитические методы ограничены, как правило, линейными задачами, большое значение в теории теплового переноса приобретают приближенные методы расчета. Создание надежных и эффективных приближенных способов решения краевых задач нелинейной теплопроводности является актуальной и важной задачей современной теплофизики.

Ниже на примере лучисто-конвективного прогрева неограниченной пластины показан приближенный метод решения задачи о нестационарном температурном поле, когда теплофизические характеристики зависят от температуры.

В этом случае перенос тепла описывается нелинейным дифференциальным уравнением теплопроводности

$$C(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial X}\left[L(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial X}\right] \quad (1)$$

с нелинейным граничным условием

$$L(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial X} = Bi(1-\theta) + Sk(1-\theta^4), \quad X = 1; \quad (2)$$

условием симметрии

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad X = 0; \quad (3)$$

начальным условием

$$\theta = \theta_0, \quad Fo = 0. \quad (4)$$

Здесь

$\theta_0 \le \theta = \dfrac{T}{T_c} < 1$, $X = \dfrac{x}{R}$, $Fo = \dfrac{a_0 \tau}{R^2}$ - число Фурье, в котором коэффициент температуропроводности $a_0 = \dfrac{\lambda_0}{C_0 \rho}$; $Bi = \dfrac{\alpha R}{\lambda_0}$ - число Био; $Sk = \dfrac{\varepsilon \sigma_0 T_c^3}{\lambda_0} R$ - число Старка. Другие обозначения - общепринятые.

Для большинства твердых тел связи безразмерных коэффициентов теплопроводности L и теплоемкости C выражаются линейными функциями

$$L(\theta) = b + n\theta, \quad (5)$$

$$C(\theta) = a + m\theta. \quad (6)$$

В заданном интервале изменения температуры θ (от θ_0 до 1) или на его отдельных участках зависимости (5) и (6) могут быть с достаточно высокой точностью аппроксимированы отрезками экспоненциальных функций [1]

$$L(\theta) \approx B\,exp(N\theta), \tag{7}$$

$$C(\theta) \approx A\,exp(M\theta). \tag{8}$$

Аппроксимацию следует производить на основе равенства площадей под истинными и расчетными кривыми по известным правилам приближения функций. Заменяя действительные зависимости отрезками экспонент, можно всегда проверить максимальные значения отклонений ΔL и ΔC и так выбрать коэффициенты A, B, N и M, чтобы эти отклонения не превышали наперед заданной величины.

Соотношения (5) – (8) позволяют упростить дифференциальное уравнение теплопроводности (1)

$$\frac{C(\theta)}{\frac{dC}{d\theta}}\frac{\partial C}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial X}\left[L(C)\frac{1}{\frac{dC}{d\theta}}\frac{\partial C}{\partial X}\right], \tag{9}$$

$$\frac{m}{M}\frac{1}{\frac{dL}{dC}}\frac{\partial L}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial X}\left[L(C)\frac{1}{\frac{dL}{dC}}\frac{\partial L}{\partial X}\right],$$

$$Fo_* = \frac{M\,n}{m\,N}, \qquad \frac{\partial L}{\partial Fo_*} = \frac{\partial^2 L}{\partial X^2}.$$

При этом краевые условия для новой переменной L примут вид:

при $X = 1$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = N\,Sk\left\{\frac{Bi}{Sk}\left[1-\left(\frac{L}{n}-\frac{b}{n}\right)\right]+1-\left(\frac{L}{n}-\frac{b}{n}\right)^4\right\}, \tag{10}$$

при $X = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \tag{11}$$

при $Fo = 0$

$$L = b + n\theta_0 = L_0. \tag{12}$$

Для решения задачи (9) – (12) применяем метод линеаризующих функций [2-10]. Суть метода сводится к следующему. Вначале нелинейная краевая задача подвергается линеаризующему преобразованию, в результате которого она приводится к однотипной задаче с линейными граничными условиями третьего рода. Появляющийся при этом в уравнении нелинейный комплекс определенным образом минимизируется и в дальнейших расчетах не учитывается.

Для решения задачи (9) – (12) используем преобразование

$$\frac{\ln W}{-\frac{n}{N}p} = F\left(\frac{Bi}{Sk}, \frac{L}{n} - \frac{b}{n}\right), \tag{13}$$

в котором p - действительное положительное число.

Для новой переменной задача (9) – (12) запишется:

$$\frac{\partial W}{\partial Fo_*} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \psi, \tag{14}$$

$$\psi = \frac{n}{N} p W \left[\frac{1}{n} \frac{-\frac{\partial L}{\partial X}}{\frac{Bi}{Sk}(1-\theta) + 1 - \theta^4} \right]^2 (4\theta^3 + \frac{Bi}{Sk} - \frac{n}{N} p), \tag{15}$$

при $X = 1$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = -p\, Sk\, W, \tag{16}$$

при $X = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial X}=0, \qquad (17)$$

при $Fo = 0$

$$W=exp\left[-\frac{n}{N}\,p\,F\left(\frac{Bi}{Sk},\frac{L_0}{n}-\frac{b}{n}\right)\right]=W_0\,. \qquad (18)$$

Из-за наличия в дифференциальном уравнении (14) нелинейного комплекса (15) получить точное решение задачи (14) – (18) затруднительно. Однако, если учесть, что $\psi\to 0$, когда $\frac{n}{N}p\to 4\theta^3+\frac{Bi}{Sk}$, то, выбирая надлежащим образом параметр p, можно уменьшить величину ψ до пределов, когда она перестанет оказывать влияние на распределение температуры и ею можно пренебречь. Решение задачи (14) – (18) при $\psi = 0$ известно. Тогда искомая температура θ найдется на основе этого решения и зависимостей (13) и (5).

Расчеты, проведенные при постоянных теплофизических параметрах, показали, что при небольших Sk и повышенных θ_0 можно полагать

$$\frac{n}{N}p=4\left(\frac{\theta_0+1}{2}\right)^3+\frac{Bi}{Sk}\;.$$

Величина ψ (X, Fo) может быть еще более уменьшена, если область изменения θ разбить на k интервалов: $\theta_0 - \theta_1,\ldots,\ \theta_\xi - \theta_{\xi\text{-}1},\ldots,\ \theta_{k\text{-}1}\text{-}\ \theta_k$ и для каждого интервала выбрать p из соотношений

$$\frac{n}{N}p_\xi=4\theta_\xi^3+\frac{Bi}{Sk},\quad \frac{n}{N}p_k=4\left(\frac{\theta_{k-1}+1}{2}\right)^3+\frac{Bi}{Sk}\;.$$

В таблице ниже приводится сравнение значений температур в неограниченной пластине (θ_0 = 0,28; Bi = 1,0; Sk = 1,0), полученных различными методами, при одном значении параметра p = 1,564. Связи (5) и (6) имеют вид

$$L(\theta) = 0{,}7543 + 0{,}8757\,\theta\,,$$

$$C(\theta) = 0{,}8635 + 0{,}4865\,\theta\,,$$

а их аппроксимация

$$L(\theta) \approx 0{,}8473\,exp(0{,}6683\,\theta)\,,$$

$$C(\theta) \approx 0{,}8976\,exp(0{,}4123\,\theta)\,.$$

Таблица

Пластина. Радиационно-конвективный нагрев

Fo	«Точное решение» по методу конечных разностей		По предлагаемому способу расчета	
	$\theta_{X=1}$	$\theta_{X=0}$	$\theta_{X=1}$	$\theta_{X=0}$
0,1	0,7039	0,2800	0,6855	0,2927
0,2	0,7679	0,3634	0,7493	0,3539
0,3	0,8086	0,4596	0,7910	0,4360
0,4	0,8437	0,5487	0,8310	0,5106
0,5	0,8661	0,6227	0,8656	0,5864
0,6	0,8882	0,6854	0,8927	0,6527
0,7	0,9073	0,7370	0,9142	0,7111
0,8	0,9232	0,7804	0,9324	0,7646
0,9	0,9358	0,8172	0,9503	0,8097
1,0	0,9461	0,8478	0,9612	0,8480

Проанализированные в работе задачи не являются исчерпывающими; они характеризуют преимущества предложенного метода. Решение других нелинейных проблем теплопроводности с иными граничными условиями может быть получено аналогично, поскольку методика построения решения таких задач принципиально не отличается одна от другой.

Литература

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 2. М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.

2. Иванов В.В. Исследование процессов переноса при нелинейных граничных условиях // Теплофизика высоких температур. 1973. Т. XI. №1. С. 128-132.

3. Иванов В.В. Метод линеаризующих функций. Оценка погрешности и области применения // Физика и химия обработки материалов. 1973. №3. С. 34-38.

4. Vidin Yu.V. An approximate method for calculating radiant heating of bodies // Heat Transfer-Soviet Research. 1970. Vol.2. № 6. pp. 131-135.

5. Иванов В.В., Саломатов В.В., Чехович В.Ю. О квазистационарном режиме при радиационно-конвективном нагреве тел // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 1. С. 127-129.

6. Иванов В.В., Кореньков А.И. Решение задач тепломассообмена при нелинейных граничных условиях // Известия СКНЦ ВШ. Технические науки. 1982. № 2. С. 21-25.

7. Keramidas G.A., Edward C. Ting. Variational formulations for heat conduction problems // J. Appl. Phys. 1979. Vol.50. № 2. pp.673-677.

8. Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А., Пономаренко А.С. Пограничные слои на стенках, подвергаемых с противоположной стороны нагреву конвекцией и радиацией одновременно // Инженерный вестник Дона. 2017. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4188.

9. Иванов В.В., Карасева Л.В., Тихомиров С.А. Теплообмен в пограничных слоях на излучающих поверхностях при градиентном течении

// Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4317.

10. Иванов В.В., Карасева Л.В. Связи между температурами многомерных тел, прогреваемых радиацией // Инженерный вестник Дона. 2018. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/5014.

References

1. Berezin I.S., Jidkov N.P. Metody vychisleniy [Methods of calculating]. Vol.2. M.: GIFML, 1959. 620 p.

2. Ivanov V.V. Teplofizika vysokih temperatur. 1973. vol. XI, № 1. pp. 128-132.

3. Ivanov V.V. Fizika i himiya obrabotki materialov. 1973. № 3. pp. 34-38.

4. Vidin Yu.V. Heat Transfer-Soviet Research. 1970. Vol.2. № 6. pp. 131-135.

5. Ivanov V.V., Salomatov V.V., Chehovich V.Yu. Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport. 1967. № 1. pp. 127-129.

6. Ivanov V.V., Korenkov A.I. Izvestiya SKNC VSh. Tehnicheskiye nauki. 1982. № 2. pp. 21-25.

7. Keramidas G.A., Edward C. Ting. J. Appl. Phys. 1979. Vol.50. № 2. pp.673-677.

8. Ivanov V.V., Karaseva L.V., Tihomirov S.A., Ponomarenko A.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2017. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4188.

9. Ivanov V.V., Karaseva L.V., Tihomirov S.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4317.

10. Ivanov V.V., Karaseva L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2018. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/5014.