Инженерный вестник Дона, №4 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2022/7584

К расчету многоэтажной рамы с жесткими ригелями

А. Д. Ловцов, И. Л. Шипелев

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

Аннотация: Рассмотрена популярная в расчетной практике сдвиговая расчетная схема многоэтажного здания. Показано применение метода перемещений, когда за неизвестные принимаются взаимные перемещения этажей рамы. Указанный прием приводит к решению системы уравнений метода перемещений с верхней двухдиагональной матрицей, что позволяет получить аналитическое решение задачи.
Ключевые слова: сдвиговая расчетная схема здания, метод перемещений, трехдиагональная матрица, метод прогонки, взаимные перемещения, аналитическое решение системы уравнений.

Рассмотрим популярную в статических [1], динамических расчетах [2] и, в частности, сейсморасчетах [3, 4] модель высотного здания в виде многоэтажной рамы с бесконечно жесткими ригелями ($EI \to \infty$). Рама в уровне ригелей загружена горизонтальными силами F_1, F_2, …, F_n. Сдвиговые жесткости этажей полагаем известными и равными k_1, k_2, …, k_n (рис. 1, *а*). Здесь EI – жесткость ригеля на изгиб, n – количество этажей. Отметим, что рассматриваемая расчетная схема позволяет смоделировать как малоэтажное, так и высотное здание со ступенчатым каркасом [5, 6].

Удобным методом расчета оказывается метод перемещений, в котором за неизвестные принимаются горизонтальные смещения $\mathbf{z} = (z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n)^{\mathrm{T}}$ ригелей соответствующих этажей [2, 7] (рис. 1, *б*). Матрица жесткости такой системы имеет вид:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \dots & 0 & \\ & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ & & & & -k_n & k_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Грузовой вектор $\mathbf{R}_f = (F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_{n-1} \quad F_n)^{\mathrm{T}}$.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2022

Таким образом, задача расчета рамы сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{R}_f \qquad (2)$$

с трехдиагональной симметричной матрицей коэффициентов и вектором неизвестных $\mathbf{z}$. Разработаны эффективные методы расчета таких систем уравнений, известные, как методы прогонки [8-10].

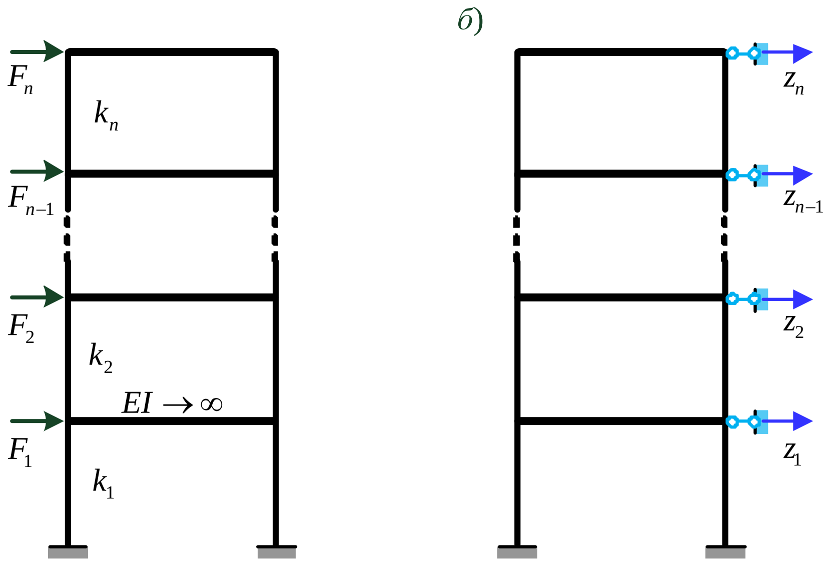

Рис. 1. Однопролетная многоэтажная рама:
а) расчетная схема;
б) основная система метода перемещений

Покажем далее прием, позволяющий существенно упростить решение задачи.

Примем в методе перемещений в качестве неизвестных взаимные перемещения ригелей рамы: $\tilde{z}_1=z_1$ – перемещения ригеля 1-го этажа относительно основания; $\tilde{z}_2=z_2-z_1$ – перемещение ригеля 2-го этажа относительно ригеля 1-го этажа и т. д. Этот прием известен в строительной механике как «группировка неизвестных» [7].

То есть:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 - z_1 \\ z_3 - z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} - z_{n-2} \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & \dots & 0 & \\ & -1 & 1 & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & \dots & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

что позволяет записать:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{z}}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2) и получим систему уравнений относительно взаимных перемещений:

$$\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{R}_f, \qquad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

При этом матрица $\tilde{\mathbf{R}}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & & & & & \\ & k_2 & -k_3 & \dots & 0 & & \\ & & k_3 & -k_4 & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & 0 & & & k_{n-1} & -k_n \\ & & & & & k_n \end{pmatrix},$$

что позволяет сразу выписать решение системы уравнений (4) в виде следующих соотношений:

$$\tilde{z}_n = \frac{R_{f,n}}{k_n};$$

$$\tilde{z}_{n-1} = \frac{R_{f,n-1} + k_n \tilde{z}_n}{k_{n-1}} = \frac{R_{f,n-1} + k_n \dfrac{R_{f,n}}{k_n}}{k_{n-1}} = \frac{R_{f,n-1} + R_{f,n}}{k_{n-1}} = \frac{\sum\limits_{j=n-1}^{n} R_{f,j}}{k_{n-1}}$$

$$\tilde{z}_{n-2} = \frac{R_{f,n-2} + k_{n-1}\tilde{z}_{n-1}}{k_{n-1}} = \frac{R_{f,n-2} + R_{f,n-1} + R_{f,n}}{k_{n-1}} = \frac{\sum_{j=n-2}^{n} R_{f,j}}{k_{n-1}};$$

$$\vdots$$

$$\tilde{z}_1 = \frac{R_{f,1} + k_2\tilde{z}_2}{k_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_{f,j}}{k_1}$$

Или, коротко:

$$\tilde{z}_{n-i} = \frac{\sum_{j=n-i}^{n} R_{f,j}}{k_{n-1}i}. \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \qquad (5)$$

Имея взаимные перемещения ригелей, легко подсчитать абсолютные перемещения ригелей:

$$z_1 = \tilde{z}_1; \qquad z_i = z_{i-1} + \tilde{z}_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \qquad (6)$$

Пример. Рассмотрим 4-х этажную раму с известной изгибной жесткостью колонн (рис. 2, *а*).

Сдвиговые жесткости этажей равны $k_i = 2 \cdot 12EI_i / h_i^3 \;\; (i = 1, 2, 3, 4)$.

На рис. 2, *б*, *в*, *г*, *д* для сдвиговой расчетной схемы здания приведены: «единичные» состояния основной системы метода перемещений, соответствующие единичному взаимному перемещению $\tilde{z}_i = 1$ и прочих взаимных перемещениях равных нулю; коэффициенты матрицы жесткости $\tilde{r}_{ij}$. На рис. 2, *е* показана матрица жесткости метода перемещений при таком выборе неизвестных.

Расчет сводится к следующему:

последовательно определяются взаимные перемещения

$$\tilde{z}_4 = \frac{F_4}{k_4}, \qquad \tilde{z}_3 = \frac{F_4 + f_3}{k_3}, \qquad \tilde{z}_2 = \frac{F_4 + F_3 + F_2}{k_2}, \qquad \tilde{z}_1 = \frac{F_4 + F_3 + F_2 + F_1}{k_1}$$

и, затем, абсолютные перемещения

$$z_1 = \tilde{z}_1, \qquad z_2 = z_1 + \tilde{z}_2, \qquad z_3 = z_2 + \tilde{z}_3, \qquad z_4 = z_3 + \tilde{z}_4.$$

На этом все. Система уравнений решена.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2022

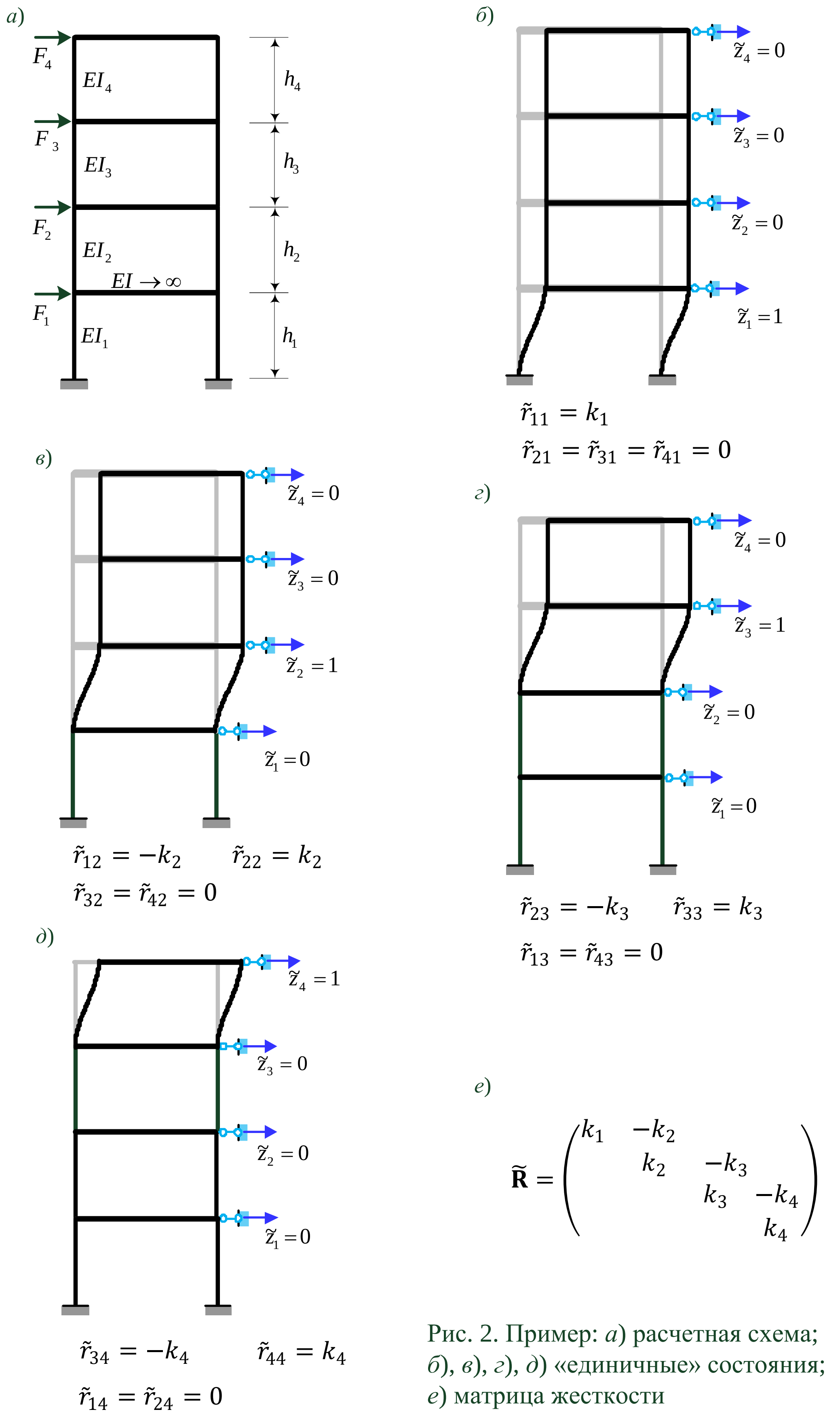

Рис. 2. Пример: *а*) расчетная схема; *б*), *в*), *г*), *д*) «единичные» состояния; *е*) матрица жесткости

Если ввести сдвиговую податливость этажей $\delta_i = \dfrac{1}{k_i}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$,

то $z_1 = \tilde{z}_1 = \dfrac{F_4 + F_3 + F_2 + F_1}{k_1} = \delta_1 \cdot (F_4 + F_3 + F_2 + F_1)$,

$$z_2 = z_1 + \tilde{z}_2 = \delta_1 \cdot (F_4 + F_3 + F_2 + F_1) + \delta_2 \cdot (F_4 + F_3 + F_2) =$$
$$= F_1\delta_1 +$$
$$+ (F_4 + F_3 + F_2)(\delta_1 + \delta_2),$$

$$z_3 = z_2 + \tilde{z}_3 = F_1\delta_1 +$$
$$+ F_2(\delta_1 + \delta_2) +$$
$$+ (F_4 + F_3)(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3),$$

$$z_4 = z_3 + \tilde{z}_4 = F_1\delta_1 +$$
$$+ F_2(\delta_1 + \delta_2) +$$
$$+ F_3(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) +$$
$$+ F_4(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4).$$

Или, коротко:

$$z_s = \sum_{i=1}^{s}\left(F_i \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right) + \sum_{i=s+1}^{n}\left(F_i \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right), \quad (s = 1, 2, ..., n-1)$$

$$z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(F_i \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right).$$

В общем случае решение для абсолютных перемещений можно представить в виде:

$$z_s = \sum_{i=1}^{s}\left(R_{fi} \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right) + \sum_{i=s+1}^{n}\left(R_{fi} \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right); \quad (s = 1, 2, ..., n-1)$$
$$z_n = \sum_{i=1}^{n}\left(R_{fi} \cdot \sum_{j=1}^{i}\delta_j\right). \tag{7}$$

Таким образом, для определения абсолютных перемещений вместо цепочки вычислений (5), (6) можно сразу воспользоваться выражениями (7). Что, кстати, можно трактовать как аналитическое решение системы уравнений (2) с трехдиагональной симметричной матрицей специального вида (1).

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2022

Заключение. Для здания, расчетную схему которого можно представить в виде многоэтажной рамы с бесконечно жесткими ригелями, применение метода перемещений приводит к необходимости решения системы уравнений с трехдиагональной симметричной матрицей такой, что сумма коэффициентов всех столбцов/строк (кроме первого/первой) равна нулю. Применение метода перемещений в терминах «относительные перемещения этажей» позволило получить аналитическое решение указанной задачи.

Литература

1. Кодыш Э. Н., Трекин Н. Н., Никитин И. К. Проектирование многоэтажных зданий с железобетонным каркасом / Монография. – М.: Издательсьво Ассоциации строительных вузов, 2009. – 352 с.
2. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапощников Н. Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. / М. Стройиздат, 1984. 415 с.
3. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures (Third Edition). – Computers & Structures, Inc. 1995. University Ave., Berkeley, CA 94704, USA. – 752 p.
4. Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А. Проблемы учета нелинейностей в теории сейсмостойкости (гипотезы и заблуждения): монография. М-во образования и науки Росс. Федерации, Моск. гос. строит. ун-т. — 2-е изд. — Москва : МГСУ, 2014. — 192 с.
5. Терентьев В.А., Абдулла Аль-Вали Ибрахим Ахмед, Мазен Ахмед Мохаммед Аль-Мадхаджи. Здание со ступенчатым каркасом в высотном строительстве // Инженерный вестник Дона. 2018. № 1. - URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_167_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8C%D0%B5%D0%B2.pdf_cc83dc3167.pdf

6. Мурадян В.А., Умаров А.Г., Меретуков З.А., Умаров Р.Г. Разработка проектных решений по повышению сейсмостойкости каменных зданий в процессе реконструкции // Инженерный вестник Дона. 2021. № 10. - URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_39__9_Muradyan_Umarov.pdf_419e8a7d0c.pdf

7. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учеб.для строит. спец. вузов. – 8-е издание., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.

8. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.

9. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. − Москва: Физматгиз, 1961. – 524 с.

10. Gould N., Scott J. A. A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse symmetric linear systems of equations // ACM Transactions on Mathematical Software. –2007. –Vol. 33. – №2. –PP. 1-32.

References

1. Kodysh Je. N., Trekin N. N., Nikitin I. K. Proektirovanie mnogojetazhnyh zdanij s zhelezobetonnym karkasom Monografija. [Design of multi-storey buildings with reinforced concrete frame]. M.: Izdatel's'vo Associacii stroitel'nyh vyzov, 2009. 352 p.

2. Smirnov A. F., Aleksandrov A. V., Lashhenikov B. Ja., Shaposhhnikov N. N. Stroitel'naja mehanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij сооружений. [Structural mechanics. Dynamics and stability of structures].M. Strojizdat, 1984. 415 p.

3. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures (Third Edition). Computers & Structures, Inc. 1995. University Ave., Berkeley, CA 94704, USA. 752 p.

4. Mkrtychev, O.V., Dzhinchvela-shvili G.A. Problemy ucheta nelinejnostej v teorii sejsmostojkosti (gipotezy i zabluzhdenija). [Problems of Accounting for Nonlinearities in the Theory of Seismic Resistance (Hypotheses and

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2022

Misconceptions)]: monografija M-vo obrazovanija i nauki Ross. Federacii, Mosk. gos. stroit. un-t. 2-e izd. Moskva: MGSU, 2014. 192 p.
5. Terent'ev V.A., Abdulla Al'-Vali Ibrahim Ahmed, Mazen Ahmed Moham-med Al'-Madhadzhi. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. № 1. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_167_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8C%D0%B5%D0%B2.pdf_cc83dc3167.pdf
6. Muradjan V.A., Umarov A.G., Meretukov Z.A., Umarov R.G. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. № 10. URL: ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_39__9_Muradyan_Umarov.pdf_419e8a7d0c.pdf
7. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics].1986. 607 p.
8. Samarskij A. A., Gulin A. V. Chislennye metody [Numerical Methods]: Ucheb, posobie dlja vuzov, 1989. 432 p.
9. Lancosh, K. Prakticheskie metody prikladnogo analiza [Practical methods of applied analysis]. Moskva: 1961. 524 p.
10. Gould N., Scott J. A. ACM Transactions on Mathematical Software. 2007. Vol. 33. №2. PP. 1-32.

© Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2007–2022