

## Численные методы оценок параметров моделей обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности финансовых временных рядов

*В.С. Гаврилов*

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва*

**Аннотация:** В настоящей статье рассматриваются численные методы, применяемые для оценки параметров семейства моделей обобщенной условной гетероскедастичности (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity - GARCH), которые широко используются для анализа и прогнозирования финансовых временных рядов с непостоянной дисперсией. В работе проводится сравнительный анализ численных методов оценки GARCH-эффектов, которые основаны на методе градиентного спуска адаптивных алгоритмов, различных вариациях квадратичных методов, базирующихся на методе Ньютона, а также альтернативных методах, основанных на симплекс-методе, линейной и квадратичной интерполяции. Анализ осуществляется на основе синтетических данных и на реальных данных по котировкам фондового индекса Мосбиржи с помощью языка программирования Python 3 и библиотек `scipy`, `numpy`, `matplotlib` и других. Результаты исследования показывают, что специфика задачи финансовых временных рядов чувствительна к выбору численных методов для решения оптимизационной задачи максимизации функции правдоподобия. Численный эксперимент показал, что использование метода Нелдера-Мида для оценки GARCH-эффектов дает наилучшие результаты для решения задачи максимизации функции правдоподобия.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, метод максимального правдоподобия, градиентный спуск, метод Ньютона, математическое моделирование, условная гетероскедастичность, временные ряды, фондовый рынок, новостные потоки

### Введение

Ввиду высокой волатильности и нестабильности финансовой отрасли, в частности, фондового рынка, задачи оценки и прогнозирования рисков являются ключевыми для всех участников: от частных инвесторов до государственных органов, — поскольку это необходимо для принятия верных решений, как с точки зрения управления рисками, так и с точки зрения регулирования стабильности рынков и устойчивости отрасли в целом [1]. Актуальность обусловлена, во-первых, ростом нестабильности в финансовой

---

отрасли: в последние годы наблюдается увеличение частоты и интенсивности операций на рынках, что сказывается на растущем уровне неопределенности и растущих рисках. Становится необходимым понимание динамики и волатильности рынков [2]. Во-вторых, требуются высококачественные прогнозы, являющиеся фундаментом для принятия обоснованных решений. В-третьих, развитие численных методов, совершенствование и создание новых алгоритмов открывает новые возможности для повышения точности и надежности семейства моделей обобщенной условной гетероскедастичности (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – GARCH), которые приобрели высокую ценность в научном и прикладном сообществах для прогнозирования волатильности финансовой отрасли [1-3].

Таким образом, *целью* исследования является сравнительный анализ численных методов и подбор наилучшего — для задачи оценки параметров моделей GARCH для анализа волатильности финансовых временных рядов на примере фондового рынка Мосбиржи.

### Модели семейства GARCH

Модели обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности GARCH(p, q) можно представить в следующем виде:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_t^2) \quad (1)$$

Где  $y_t$  — некоторый временной ряд. Уравнение (1) может быть заменено на более общее, например, если ряд не является стационарным в широком смысле, с добавлением первой разности, авторегрессии и скользящего среднего. В общем виде в правую часть уравнения (1) обычно добавляют

---

$ARIMA(p, d, q)$ , подбирая параметры на конкретных данных, используя различные метрики качества, например критерии Аккаике, Шварца и другие. Ключевое уравнение условной дисперсии, определяющие GARCH-модель, представлено в уравнении (2). Модели семейства GARCH определяются вариацией и изменением аналитической формулы (2). Например, если бета-коэффициенты равны нулю, то уравнение превращается в  $ARCH(p)$  процесс.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2 \quad (2)$$

Оценка вектора параметров  $\theta$  осуществляется статистическим методом максимального правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия представлен в (3).

$$\mathcal{L}(\omega, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln \sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) \rightarrow \max(\omega, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \quad (3)$$

### **Численные методы для задачи максимизации функции правдоподобия**

Для решения задачи (3) применяются численные методы, являющиеся вариацией метода градиентного спуска, метода Ньютона и альтернативных методов, таких как симплекс-метод, линейная интерполяция, квадратичная интерполяция и других. В настоящей работе используются следующие методы:

- **Adam (Adaptive Moment Estimation)** — адаптивный метод градиентного спуска, который использует средние значения градиентов и их квадратов [4].

- **RMSProp (Root Mean Square Propagation)** — метод, который корректирует скорость обучения для каждого параметра на основе среднеквадратичного значения градиента, что помогает избежать проблем с затухающими градиентами [5].
- **CG (Conjugate Gradient)** — метод сопряженных градиентов, который находит минимум функции, используя информацию о градиенте [6].
- **TNC (Truncated Newton Conjugate Gradient)** — метод, который использует градиенты и вторые производные для оптимизации, комбинируя элементы метода Ньютона и метод сопряженных градиентов [7].
- **SLSQP (Sequential Least Squares Programming)** — метод, основанный на последовательном квадратичном программировании, который использует градиенты [8].
- **BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)** — квазиньютоновский метод, который использует информацию о градиенте для обновления аппроксимации матрицы Гессе (вторых производных) без необходимости её вычисления [9].
- **L-BFGS-B (Limited-memory BFGS with Box constraints)** — ограниченная версия BFGS, использующая меньше памяти, что делает её подходящей для задач с большим числом параметров [10].
- **Nelder-Mead** — симплекс-метод, который заключается в последовательном перемещении и деформировании симплекса вокруг точки максимума (минимума) [11].
- **COBYLA (Constrained Optimization BY Linear Approximations)** — метод, который использует линейную интерполяцию для решения задач с ограничениями и не требует градиентов [12].

- **COBYQA (Constrained Optimization BY Quadratic Approximations)** — метод, который использует квадратичные аппроксимации для поиска минимума, также не требует градиентов [13].
- **trust-constr (Trust Region Constrained)** — метод, который использует доверительные области и может включать как градиенты, так и вторые производные для оптимизации с учетом ограничений [14].

### Используемые данные

Для подбора наилучшего метода используется два набора данных.

Первый — синтетический, сгенерированный. Параметры генерации:

- процесс GARCH (1,1)
- 2000 наблюдений
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$
- $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.3y_{t-1}^2 + 0.5\sigma_{t-1}^2$
- $\sigma_0^2 = \frac{0.2}{1-0.3-0.5} = 1$

Второй набор данных — реальный. Данные о котировках индекса Мосбиржи на фондовом рынке за период с 01.01.2016 по 01.01.2022. Данные брались с официального сайта [yahoo.finance](https://www.yahoo.com/finance) с помощью библиотеки **yfinance** для Python 3.

Чтобы убедиться в наличии GARCH-эффектов был проведен статистический тест Льюнга-Бокса на автокорреляцию квадратов доходностей. Результаты для лагов до 10 включительно представлены в таблице 1.

Если р-значение меньше 0.05 для какого-либо лага, это указывает на наличие автокорреляции квадратов доходностей, что свидетельствует о GARCH-эффектах.

Таким образом, на основании теста Льюинга-Бокса можем утверждать, что в котировках индекса Мосбиржи присутствуют GARCH-эффекты на любом разумном уровне значимости. Это необходимо для построения дальнейших рассуждений.

Таблица 1.

Результаты статистического теста Льюинга-Бокса на наличие GARCH-эффектов.

Номер лага	Значение статистики	p-значение
1	45.582	0.0
2	89.049	0.0
3	156.591	0.0
4	166.989	0.0
5	201.852	0.0
6	285.761	0.0
7	300.649	0.0
8	474.203	0.0
9	494.632	0.0
10	502.786	0.0

### Численный эксперимент

В качестве критерия качества использовались значения функции правдоподобия. Для оценки параметров на синтетических данных решим задачу оптимизации (3) каждым из перечисленных выше численных методов. Результаты на синтетических данных представлены в таблице 2: по столбцам указаны оценки процесса GARCH(1,1) и отрицательное значение логарифма правдоподобия, а по строкам — используемые численные методы. Данные ранжированы по убыванию качества (правдоподобия).

Первая строка представляет собой значение логарифма правдоподобия на истинных параметрах  $\omega = 0.2, \alpha = 0.3, \beta = 0.5$ .

Таблица 2.

Оценки параметров модели GARCH(1,1) численными методами на искусственных данных.

Численный метод	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$-\ln \mathcal{L}$
Истинное значение	0.2000	0.3000	0.5000	2613.0000
Nelder-Mead	0.2132	0.3000	0.4696	2613.1798
CG	0.2132	0.3000	0.4696	2613.1798
BFGS	0.2132	0.3000	0.4696	2613.1798
trust-constr	0.2219	0.3105	0.4539	2613.2346
TNC	0.2330	0.2914	0.4507	2613.4794
RMSProp	0.2215	0.3079	0.4689	2613.6691
COBYQA	0.3204	0.4416	0.2577	2620.7348
Adam	0.1646	0.5986	0.3618	2643.6338
SLSQP	0.8839	0.1481	0.0079	2689.6248
L-BFGS-B	0.1000	0.6000	0.3000	2746.2898
COBYLA	0.1000	0.6000	0.3000	2746.2898

Как видно на синтетических данных, примерно одинаковые результаты дают методы Nelder-Mead, CG, BFGS, trust-constr, TNC, RMSProp. Наиболее близкие значения к истинным параметрам и наибольшее значение функции правдоподобия имеют оценки, полученные методами Nelder-Mead (симплекс-метод), CG (метод сопряженных градиентов), BFGS (квазиньютоновский метод). Все три метода дают одинаковый результат с точностью до тысячных. Визуализация результатов представлена на рис. 1.

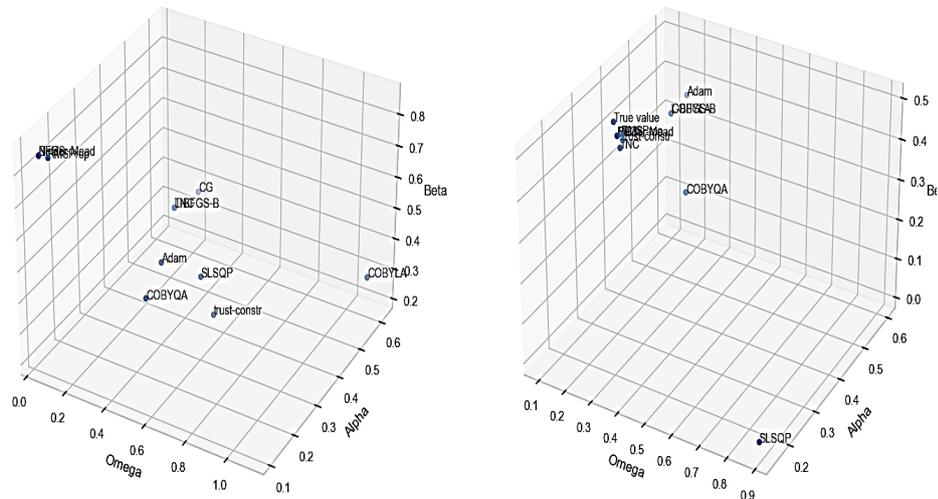


Рис. 1. — 3D визуализация оценок параметров модели GARCH(1,1) различными численными методами

На рис.2 можно увидеть, что эти методы в плоскостях значения наиболее близкие к истинным. Если учитывать скорость метода, то наилучшим выбором будет метод сопряженных векторов CG и симплекс-метод Нелдера-Меда, поскольку квазиньютоновский метод требует, возможно, частичный подсчет вторых производных, что добавляет сложности в вычислениях.

Результаты численного эксперимента на реальных данных представлены в таблице 3, на рис.1, 3. Как видно из таблицы, наилучшие результаты в смысле максимального значения функции правдоподобия дал снова метод Нелдера-Меда, и точно такой же результат дал квазиньютоновский метод BFGS. Оценки параметров и значение оптимизируемой функции совпадают в точности до 4 знака, однако метод BFGS является более вычислительно сложным, поэтому на первое место можно поставить Nelder-Mead. Дополнительного исследования требует скорость сходимости, поскольку она может изменить выбор в пользу BFGS. Далее идет адаптивный метод градиентного спуска RMSProp, получивший широкое распространение и применение при обучении нейронных сетей с различными архитектурами. Чуть худшие результаты дали методы Adam,

COBYQA, SLSQP, trust-constr, CG. Остальные методы не сдвинулись с начальной точки (0,1; 0,6; 0.3) и дали худшие результаты в смысле значения функции правдоподобия.

Таблица 3.

Оценки параметров модели GARCH(1,1) численными методами на данных индекса Мосбиржи.

Численный метод	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$-\ln \mathcal{L}$
Nelder-Mead	0.0491	0.1084	0.8500	2075.2400
BFGS	0.0491	0.1084	0.8500	2075.2400
RMSProp	0.0662	0.1293	0.8306	2078.9393
Adam	0.3584	0.3361	0.3978	2120.0247
COBYQA	0.4072	0.2338	0.3814	2125.2726
SLSQP	0.4886	0.3948	0.3319	2136.5959
trust-constr	0.5468	0.4009	0.2147	2142.1371
CG	0.2076	0.6177	0.3637	2151.4671
COBYLA	1.1000	0.6000	0.3000	2317.0269
TNC	0.1000	0.6000	0.3000	2337.5727
L-BFGS-B	0.1000	0.6000	0.3000	2337.5727

На рисунке 1 явно наблюдается отсутствие такой сильной согласованности в результатах по сравнению с синтетическими данными, где все методы дают примерно одинаковый хороший результат. Поскольку истинные значения неизвестны, можно сделать выбор в пользу метода Нелдера-Мида, который показал наилучшие результаты, но, при этом не является классическим для решения задачи максимизации правдоподобия (3).

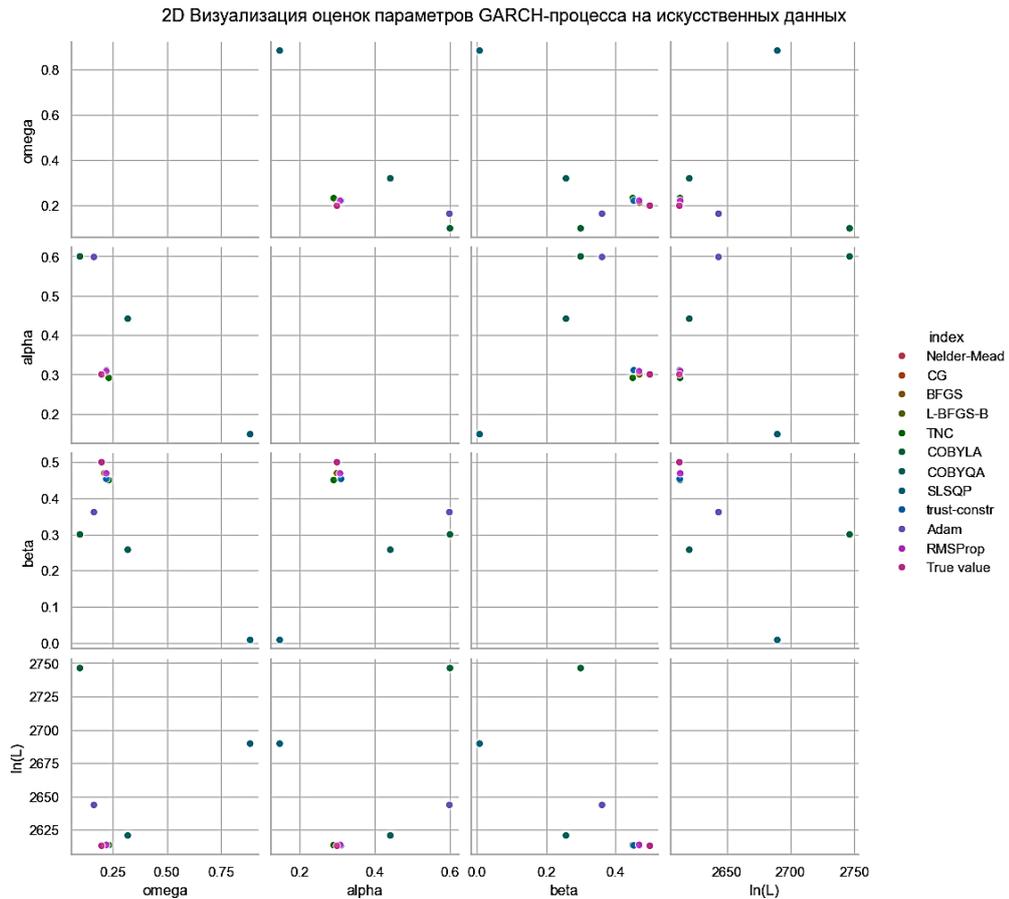


Рис. 2. — 2D визуализация оценок параметров GARCH-процесса на искусственных данных

На рисунке 2 в плоскостях параметров  $\omega, \alpha, \beta$  (попарных) видно, как плотно расположены оценки параметров модели, полученных методами Nelder-Mead, CG, BFGS, trust-constr, TNC, RMSProp, оценки находятся вблизи истинного значения. При этом оценки, полученные остальными методами, лежат чуть дальше, что аналитически представлено в таблице 2. Как видно из таблицы, это отражается на их качестве, то есть меньшим значением функции правдоподобия.

Оценки коэффициентов, полученных на реальных данных не так кучно расположены, друг относительно друга. Однако же методы с наибольшим значением функцией правдоподобия дали близкие значения параметров  $\omega, \alpha, \beta$ .



Рис. 3. — 2D визуализация оценок параметров GARCH-процесса на данных котировок индекса Мосбиржи.

### Заключение

В данной статье были рассмотрены численные методы, применяемые для оценки параметров моделей семейства GARCH, которые широко используются для анализа и прогнозирования финансовых временных рядов с непостоянной дисперсией. Результаты показали, что использование альтернативных численных методов может привести к лучшему решению задачи (3). Результаты сравнительного анализа как на синтетических, так и на реальных данных показали, что наилучшим методом для решения данной задачи является метод Нелдера-Мида, что согласуется с [15] и [16], который заключается в последовательном перемещении и деформировании симплекса

вокруг точки максимума функции правдоподобия в формуле (3). Настоящее исследование имеет потенциал развития в следующих направлениях: использование альтернативных аналитических уравнений (1, 2), переход к другим моделям семейства GARCH, кроме классической, рассмотренной в настоящей работе. Также может быть заменена задача (3) на метод моментов, байесовский анализ и других. Помимо этого, можно варьировать параметры численного эксперимента: начальную (инициализирующую) точку, что позволит проверить устойчивость результатов, параметры численных методов, другие финансовые временные ряды, добавление экзогенных регрессоров, например, новостных потоков, и так далее. Одно из основных направлений дальнейших исследований — создание новых численных методов [17] для решения задачи оценки GARCH-эффектов, основанных на существующих вариациях классических методов и позволяющих получить наилучшие оценки в решаемой задаче [18]. В свою очередь, это может способствовать улучшению прогнозирования финансовых временных рядов и оптимизации принимаемых решений.

### Литература

1. Razouk A., Ait Daoud R., El Mehdi Falloul M. Numerical optimization methods for financial time series GARCH(p, q) model, a comparative approach // 2022 8th International Conference on Optimization and Applications (ICOA). 2022. pp. 1-7.
2. Zeng H., Shao B., Dai H., Yan Y., Tian N. Prediction of fluctuation loads based on GARCH family-CatBoost-CNN-LSTM // Energy. 2023. Vol. 263. URL: doi.org/10.1016/j.energy.2022.126125
3. Zolfaghari M., Gholami S. A hybrid approach of adaptive wavelet transform, long short-term memory and ARIMA-GARCH family models for the stock index prediction // Expert Systems with Applications. 2021. Vol. 182. pp. 115-149.

4. Singarimbun R. N., Nababan E. B., Sitompul O. S. Adaptive moment estimation to minimize square error in backpropagation algorithm // 2019 International Conference of Computer Science and Information Technology (ICoSNIKOM). IEEE. 2019. pp. 27-46.
  5. Zou F., et al. A sufficient condition for convergences of Adam and RMSprop // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2019. pp. 11127-11135.
  6. Shewchuk, J. R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Pittsburgh. School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh. 1994. 64 p.
  7. Dembo, R. S., & Steihaug, T. Truncated-Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization // Mathematical Programming, 26.2. 1983. pp. 190-212.
  8. Fu, Z., Liu, G., & Guo, L. Sequential quadratic programming method for nonlinear least squares estimation and its application // Mathematical Problems in Engineering. 2019. URL: [doi.org/10.1155/2019/3087949](https://doi.org/10.1155/2019/3087949)
  9. Head J. D., Zerner M. C. A Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno optimization procedure for molecular geometries // Chemical Physics Letters. 1985. Vol. 122, No. 3. pp. 264-270.
  10. Byrd R. H., et al. A limited memory algorithm for bound constrained optimization // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995. Vol. 16, No. 5. pp. 1190-1208.
  11. Gao F., Han L. Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters // Computational Optimization and Applications. 2012. Vol. 51, No. 1. pp. 259-277.
  12. Pellow-Jarman, A., Sinayskiy, I., Pillay, A., et al. A comparison of various classical optimizers for a variational quantum linear solver. Quantum Information Processing, 2021. pp. 20-202.
-

13. Araujo M. C., et al. Constrained optimization based on quadratic approximations in genetic algorithms // Constraint-handling in evolutionary optimization. 2009. pp. 193-217.
14. Yuan, Ya-xiang. A review of trust region algorithms for optimization // ICIAM. 2000. Vol. 99, pp. 271-282.
15. Mehta, P., Yildiz, B. S., Kumar, S., Pholdee, N., Sait, S. M., Panagant, N., Bureerat, S., & Yildiz, A. R. A Nelder-Mead-infused INFO algorithm for optimization of mechanical design problems // Materials Testing, 2022. pp. 1172-1182.
16. Shirgir, S., Farahmand-Tabar, S., & Aghabeigi, P. Optimum design of real-size reinforced concrete bridge via charged system search algorithm trained by Nelder-Mead simplex // Expert Systems with Applications, 2024. URL: [doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121815](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121815).
17. Астахова А.Я., Рузанкин Р.С. Численные методы расчета тонких изотропных оболочек вращения // Инженерный вестник Дона, 2024, №9. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9492](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9492).
18. Гаврилов В.С., Корчагин С.А. Разработка математической модели и программного комплекса для автоматизации научных исследований в области анализа новостей финансовой отрасли // Инженерный вестник Дона, 2024, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9034](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9034).
19. Красий Н.П. О вычислении спреда для обобщённой модели (B, S) рынка в случае скупки акций // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2114](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2114).

### References

1. Razouk A., Ait Daoud R., El Mehdi Falloul M. Numerical optimization methods for financial time series GARCH(p, q) model, a comparative approach. 8th International Conference on Optimization and Applications (ICOA). 2022. pp. 1-7.

2. Zeng H., Shao B., Dai H., Yan Y., Tian N. Prediction of fluctuation loads based on GARCH family-CatBoost-CNN-LSTM. *Energy*. 2023. Vol. 263. URL: [doi.org/10.1016/j.energy.2022.126125](https://doi.org/10.1016/j.energy.2022.126125)
  3. Zolfaghari M., Gholami S. *Expert Systems with Applications*. 2021. Vol. 182. P. 115-149.
  4. Singarimbun R. N., Nababan E. B., Sitompul O. S. Adaptive moment estimation to minimize square error in backpropagation algorithm. *International Conference of Computer Science and Information Technology (ICoSNIKOM)*. IEEE. 2019. pp. 27-46.
  5. Zou F., et al. *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019. pp. 11127-11135.
  6. Shewchuk, J. R. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. Pittsburgh. School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh. 1994. 64 p.
  7. Dembo, R. S., & Steihaug, T. Truncated-Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization. *Mathematical Programming*, 26.2. 1983. P. 190-212.
  8. Fu, Z., Liu, G., & Guo, L. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. URL: [doi.org/10.1155/2019/3087949](https://doi.org/10.1155/2019/3087949)
  9. Head J. D., Zerner M. C. A Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno optimization procedure for molecular geometries. *Chemical Physics Letters*. 1985. Vol. 122, No. 3. pp. 264-270.
  10. Byrd R. H., et al. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1995. Vol. 16, No. 5. pp. 1190-1208.
  11. Gao F., Han L. *Computational Optimization and Applications*. 2012. Vol. 51, No. 1. pp. 259-277.
  12. Pellow-Jarman, A., Sinayskiy, I., Pillay, A., et al. *Quantum Information Processing*, 2021. pp. 20-202.
-



13. Araujo M. C., et al. Constraint-handling in evolutionary optimization. 2009. pp. 193-217.
14. Yuan, Ya-xiang. A review of trust region algorithms for optimization. ICIAM. 2000. Vol. 99, pp. 271-282.
15. Mehta, P., Yildiz, B. S., Kumar, S., Pholdee, N., Sait, S. M., Panagant, N., Bureerat, S., & Yildiz, A. R. Materials Testing, 2022. pp. 1172-1182.
16. Shirgir, S., Farahmand-Tabar, S., & Aghabeigi, P. Expert Systems with Applications, 2024. URL: [doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121815](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121815)
17. Astakhova A.Ya., Ruzankin R.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2024, №9. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9492](https://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9492)
18. Gavrilov V.S., Korchagin S.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2024, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9034](https://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9034)
19. Krasiy N.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2114](https://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2114)

**Дата поступления: 1.02.2025**

**Дата публикации: 3.03.2025**