Инженерный вестник Дона, №2 (2026)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2026/10779

Разработка математической модели функционала – экстраполятора L-марковского фрактального процесса

Л.Ю.Фадеева[1], *А.Н.Титов*[2]

[1]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ*
[2]*Казанский национальный исследовательский технологический университет*

Аннотация: Построена стохастическая модель оптимального функционала – экстраполятора фрактального L – марковского процесса с квазирациональным спектром. При разработке модели использовались методы спектрального и фрактального анализа случайных процессов, теория функций комплексного переменного, методы вычисления стохастических интегралов; теория стохастических дифференциально – разностных уравнений, связывающих процессы с квазирациональным спектром с процессами с рациональным спектром; а также оригинальная методика построения спектральных характеристик экстраполирования, разработанная известным математиком А. Ягломом. С помощью теоремы Левинсона – Маккина установлено, что исследуемые в работе случайные процессы носят L – марковский характер. Выполнение условий теоремы Мандельброта о форме спектральной плотности фрактальных случайных процессов, а также значения показателей Хёрста и индекса фрактальности дают основание предполагать, что исследуемый случайный процесс является фрактальным и, более того, персистентным. Доказано, что оптимальный экстраполятор, построенный по всему прошлому процесса можно представить в виде суммы линейной комбинации значений самого процесса в трех моментах времени в случае $0 < \tau < 1$ и в двух моментах времени в случае $1 \le \tau < 2$ и интеграла с экспоненциально затухающей весовой функцией, распространенного на $(-\infty; \infty)$. В первом случае L – граница исследуемого L – марковского процесса состоит из трех точек $L = \{t;\, t-2;\, t+\tau-2\}$, а во втором – из двух точек $L = \{t;\;\; t+\tau-2\}$, где τ – время упреждения.
Ключевые слова: экстраполирование, L – марковский процесс, фрактальность, трендоустойчивость, спектральная характеристика, оптимальный экстраполятор.

Введение. Исследование задач экстраполирования и интерполяции было начато в середине прошлого века основоположником теории вероятностей, академиком А. Н. Колмогоровым. В дальнейшем исследования А. Н. Колмогорова были продолжены известными математиками М. Г. Крейном, К. Каруненом, Л.А. Заде, Р. Рагацинни и знаменитым американским математиком – кибернетиком Н. Винером, которому первому удалось получить явные экстраполяционные формулы для случайных процессов с рациональными спектральными плотностями. Следует отметить, что «изложение решения задач об экстраполировании и о фильтрации в работах Н. Винера, рассчитано на читателя – инженера и никак не претендует на соблюдении математической строгости» [1].

Ученик А. Н. Колмогорова, математик А. М. Яглом выдвинул оригинальную идею, позволившую ему не только получить математическое доказательство формул Н. Винера, но и расширить класс рациональных спектральных плотностей, допускающих получение явных экстраполяционных формул, до класса плотностей, знаменателем которых является произведение многочлена на экспоненциальную функцию [2]:

$$f(\omega)=\frac{B}{|\omega-i\alpha|^2\cdot\left|1+ae^{-i\gamma\omega}\right|^2}=\frac{B}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)\left(1+a^2+2\cos\gamma\omega\right)},$$

где $B > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $|a|<1$.

Сущность этой идеи в том, чтобы рассматривать спектральную плотность процесса, а также другие функции того же аргумента, появляющиеся при решении задачи экстраполирования, как значения на действительной оси некоторых аналитических функций комплексного переменного и использовать далее общие свойства таких функций (типа даваемых теоремой Коши). Далее вопросом экстраполирования наряду с А. Ягломом занимались югославский математик Д. Малишич и казанский математик С. Григорьев [3], положившие метод А. Яглома в основу своих исследований.

Целью данной работы является разработка математической модели функционала – экстраполятора L – марковского фрактального процесса.

Методы решения задачи. Задача о линейном экстраполировании по всему прошлому стационарного случайного процесса $\xi(s)$ заключается в нахождении линейного функционала $\tilde{\xi}(t+\tau)$ от значений $\xi(s)$ при $s \le t$, дающего наилучшее приближение к значению $\xi(t+\tau)$, $\tau > 0$. Задачу экстраполяции можно поставить и в терминах функций комплексного переменного: требуется найти функцию $\Phi_\tau(\omega)$ комплексного переменного ω, удовлетворяющую достаточным условиям, сформулированным в работе [1] и являющуюся ядром в спектральном представлении оптимального экстраполятора:

$$\tilde{\xi}(t;\tau)=\tilde{\xi}(t+\tau)=\mathrm{L}\ \{\xi(s),s\le t\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\Phi_{\tau}(\omega)dZ(\omega)\ , \tag{1}$$

Функция $\Phi_\tau(\omega)$ называется спектральной характеристикой экстраполирования, а функция Z(ω) в формуле (1) является случайной функцией с некоррелированными приращениями, участвующая в спектральном разложении случайного процесса $\xi(s)$.

$$\xi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\omega}dZ(\omega)\ . \tag{2}$$

В представленной работе на основе полученных этими учеными спектральных характеристик экстраполяции для процессов со спектральными плотностями, обобщающими рациональную спектральную плотность, была выведена явная формула оптимального экстраполятора и рассчитаны числовые прогнозные значения L - марковского фрактального процесса с квазирациональной спектральной плотностью вида:

$$S(\omega)=\frac{1}{\left|Q_0(\omega)+Q_1(\omega)e^{-i\omega}+Q_2(\omega)e^{-2i\omega}\right|^2}=\frac{1}{\left|G(\omega)\right|^2}=\frac{1}{\left|A\omega+B+2ae^{-i\omega}+(C\omega+D)e^{-2i\omega}\right|^2}, \tag{3}$$

где $A=d+i(b-c)$, $B=a-c-id$, $C=d-(c+b)i$, $D=a+c+di$, а действительные числа a, b, c, d связаны соотношениями:

$$b>a>0;\ c>0,\ d>0. \tag{4}$$

Соотношения (4) обеспечивают принадлежность всех корней квазиполинома $G(\omega)=Q_0(\omega)+Q_1(\omega)e^{-i\omega}+Q_2(\omega)e^{-2i\omega}$ верхней полуплоскости H^+. Этот факт доказан в работе авторов [4].

Следует отметить, что в работе авторов [5] построен оптимальный линейный экстраполятор для процесса (видеосигнала) со спектральной плотностью $S_1(\omega)=\left|G(\omega)\right|^2/\left|A(\omega)\right|^2$, где $A(\omega)$ – многочлен.

В статье [2] была выявлена связь между случайным процессом с рациональным спектром и процессом с квазирациональной спектральной плотностью в виде стохастического дифференциально-разностного уравнения. Эта связь позволила установить следующую формулу спектральной характеристики экстраполирования $\Phi_\tau(\omega)$ для процесса со спектральной плотностью $f(\omega)$, более общего, чем формула (3):

$$f(\omega)=\left|Q(\omega)\right|^2\Big/\left|Q_0(\omega)+Q_1(\omega)e^{-i\omega g_1}+Q_2(\omega)e^{-2i\omega g_2}\right|^2 , \tag{5}$$

$$\Phi_\tau(\omega)=\left\{\left[G(\omega)P(\omega)\right]\Big/\left[Q(\omega)Q_0^{N+1}(\omega)\right]\right\}+e^{i\omega\tau}\cdot U(\omega), \tag{6}$$

где

$$U(\omega)=\sum_{\Gamma_1}\frac{\left(k_2+k_1^*\right)!}{k_2!k_1^*!}\cdot R_2^{k_2}\cdot R_1^{k_1^*+1}\cdot e^{-i\omega\left(k_2\cdot 2+k_1^*+1\right)}+\sum_{\Gamma_2}\frac{\left(k_1+k_2^*\right)!}{k_1!k_2^*!}\cdot R_1^{k_1}\cdot R_2^{k_2^*+1}\cdot e^{-i\omega\left[k_1+2\left(k_2^*+1\right)\right]} , \tag{7}$$

$\Gamma_1=\left\{k_2:k_2\geq 0,k_2\cdot 2\leq\tau\right\}$; $\Gamma_2=\left\{k_1:k_1\geq 0,k_1\cdot 1\leq\tau\right\}$; $k_1^*=k_1^*\left(k_2^*\right)=\left[\tau-2k_2\right]$;

$k_2^*=k_2^*\left(k_1^*\right)=\left[\left(\tau-k_1\right)/2\right]$; $N=\left[\tau/g_1\right]$; $R_1=R_1(\omega)=-Q_1(\omega)/Q_0(\omega)$;

$$R_2=R_2(\omega)=-Q_2(\omega)/Q_0(\omega) . \tag{8}$$

Здесь символом [Ω] обозначается целая часть числа Ω.

В формуле (6) $P(\omega)$ – многочлен степени N, $N+1$ неизвестных коэффициентов которые определяются из условий аналитичности спектральной характеристики экстраполирования $\Phi_\tau(\omega)$ в нижней полуплоскости H^- и связанной с ней нижеследующей формулой функцией $\Psi_\tau(\omega)$ в верхней полуплоскости H^+:

$$\Psi_\tau(\omega)=\left[e^{i\tau\omega}-\Phi_\tau(\omega)\right]f(\omega) . \tag{9}$$

Эти требования аналитичности функций $\Phi_\tau(\omega)$ и $\Psi_\tau(\omega)$ в H^- и, соответственно, H^+ , составляют ядро метода А. Яглома.

Сопоставляя формулы (3) и (5) видим, что при $Q(\omega)\equiv 1$, n = 2, g_1 = 1, g_2 = 2 формула (5) представляет собой спектральную плотность (3), причем все корни $G(\omega)$ принадлежат H^+, как этого требует метод, разработанный в работе [1].

Класс спектральных плотностей (5) является подклассом L – марковских процессов, так как знаменателем этих спектральных плотностей является целая функция экспоненциального типа [5]. В силу теоремы Левинсона – Маккина такие спектральные плотности соответствуют $L-$ марковским процессам [6].

Более того, авторами установлено, что при определенных значениях параметров спектральной плотности (5) соответствующий процесс будет еще и фрактальным процессом. Этот факт устанавливает новые интересные и неожиданные связи между такими понятиями как фрактальность и $L-$ марковость случайных процессов.

Однако, если обратиться к истории возникновения в науке тех и других процессов, разница между которыми всего 10 – 15 лет, то эта связь становится понятной.

Основоположник теории фракталов, французский математик Б. Мандельброт в 60-х годах прошлого века поставил задачу найти такие случайные процессы, которые по его словам «обладали бы хоть какой – то памятью» [7, 8] по сравнению с марковскими процессами, память которых состоит из одного единственного доступного для исследователя последнего значения процесса. Он нашел такие процессы, назвал их фрактальным броуновским движением и выявил их главную отличительную от марковских процессов черту: показатель Хёрста H для фрактальных случайных процессов (так впоследствии стали называть процессы Мандельброта) лежит в пределах $0 < H < 0{,}5$ и $0{,}5 < H < 1$. Если H = 0,5, то такие процессы являются марковскими.

Таким образом, фрактальные случайные процессы не являются марковскими процессами.

Основываясь на методах исследования стохастических интегралов Мандельброт доказал теорему о форме спектральной плотности фрактальных случайных процессов [7, 8]. В ней показано, что если $\xi(t)$ является фрактальным случайным процессом с параметром Хёрста H: $0 < H < 1$

($H \neq 0{,}5$), то для его спектральной плотности имеет место соотношение $S(\omega) \sim 1/\omega^{1+\varepsilon}$, $1 \leq \varepsilon < 2$.

Исследуемые в настоящей работе случайные процессы со спектральными плотностями вида (3) являются фрактальными, поскольку их спектральные плотности подобны $1/\omega^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon \geq 1$.

Вторым очевидным свидетельством фрактальности процессов (3) служат их графики, по форме соответствующие графикам фрактальных процессов.

И третьим аргументом в пользу фрактальности процессов (3) являются значения показателя Хёрста, рассчитанные авторами с помощью R/S – критерия Хёрста. Эти значения, оказавшиеся в интервале (0,75 – 0,83) в зависимости от значений параметров *a*, *b*, *c*, *d* плотности (3), свидетельствуют не только о фрактальности ($H \neq 0{,}5$), но и о высокой трендоустойчивости (персистентности) процессов, поскольку их показатель Хёрста значительно превосходит критическое значение 0,5 [9]. Как известно, высокая трендоустойчивость (другими словами, малая фрактальная размерность $D = 2 - H$) ведет к высокой надежности прогноза исследуемых процессов [9].

В 60-х годах прошлого века были открыты L – марковские последовательности [10], а затем в 1973 году и L – марковские процессы и поля [6], характерной особенностью которых является их конечная память в виде L – границы. Исследуемые авторами процессы, как было указано выше, являются L – марковскими и, следовательно, обладают не «какой – нибудь памятью», как того пытался добиться Мандельброт, а памятью в виде L – интервала (L – границы по Розанову [10]) прошлых значений процесса, по которым будет строиться прогноз в нижеприведенных расчетах.

Следует отметить, что в работе авторов [11] найдена явная формула оптимального оператора фильтрации с прогнозом для L – марковского процесса со спектральной плотностью (3).

Результаты работы. Покажем, как с помощью формул (6) – (9) можно вывести явные формулы спектральной характеристики и соответствующего ей экстраполятора для процесса со спектральной плотностью (3).

Из формул (6) – (9) следует, что в каждом конкретном случае вид спектральной характеристики экстраполирования будет различным для сроков упреждения τ, лежащих в разных интервалах.

Рассмотрим сначала случай $0 < \tau < 1$.

Поскольку $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, число N будет равно $N=[\tau/g_1]=[\tau/1]=0$, а множества Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1=\{k_2 : k_2\ge 0; k_2\cdot g_2\le\tau\}=\{0\}$; $\Gamma_2=\{k_1 : k_1\ge 0; k_1\cdot g_1\le\tau\}=\{0\}$.

Для вычисления функции $U(\omega)$, заданной формулой (7), необходимо прежде всего определить целые числа $k_1^*=k_1^*(k_2^*)=[\tau-2k_2]$ и $k_2^*=k_2^*(k_1)=[(\tau-k_1)/2]$: $k_1^*(k_2=0)=0$; $k_2^*(k_1=0)=0$.

Подставляя найденные значения k_1^* и k_2^* в формулу (7) и учитывая, что $R_1=-Q_1/Q_0$; $R_2=-Q_2/Q_0$, получим:

$$U(\omega)=\frac{0!}{0!}\left(-\frac{Q_2}{Q_0}\right)^0\left(-\frac{Q_1}{Q_0}\right)e^{-i\omega}+\frac{0!}{0!}\left(-\frac{Q_2}{Q_0}\right)\left(-\frac{Q_1}{Q_0}\right)^0 e^{-2i\omega}=-\frac{Q_1(\omega)}{Q_0(\omega)}e^{-i\omega}-\frac{Q_2(\omega)}{Q_0(\omega)}e^{-2i\omega}\ .$$

Подставляя $U(\omega)$ в формулу (6) и учитывая, что $N = 0$, $Q(\omega) = 1$, получим:

$$\Phi_\tau(\omega)=\frac{\alpha\cdot G(\omega)}{Q_0(\omega)}-\frac{e^{i\omega\tau}}{Q_0(\omega)}\cdot\left\{Q_1(\omega)e^{-i\omega}+Q_2(\omega)e^{-2i\omega}\right\}\ , \qquad (11)$$

где α – многочлен нулевой степени в силу $N = 0$.

Тогда функция $\Psi_\tau(\omega)$ примет вид:

$$\Psi_\tau(\omega)=\left[e^{i\tau\omega}-\Phi_\tau(\omega)\right]\cdot S(\omega)=\left(e^{i\omega\tau}-\alpha\right)/\left[Q_0(\omega)\cdot\bar{G}(\omega)\right]\ , \qquad (12)$$

Единственный корень многочлена $Q_0(\omega)=A\omega+B$

$\omega_0 = -B/A = \left\{ d(b-a) + i\left[d^2 - (b-c)(c-a) \right] \right\} / \left[d^2 + (b-c)^2 \right]$ в силу соотношений (4) лежит в верхней полуплоскости H^{+}, поэтому спектральная характеристика $\Phi_\tau(\omega)$ аналитична в нижней полуплоскости.

Чтобы удовлетворить условию аналитичности функции $\Psi_\tau(\omega)$ вида (12) в H^{+}, достаточно потребовать обращения в нуль её числителя в точке $\omega_0 = -B/A$: $\left(e^{i\omega\tau} - \alpha\right) = 0$. Отсюда получим:

$$\alpha = e^{-Bi\tau/A} . \qquad (13)$$

Рассмотрим теперь случай $1 \le \tau < 2$.

Тогда $N = [\tau/g_1] = [\tau] = 1$, а множества Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 = \{k_2 : k_2 \ge 0; k_2 \cdot g_2 \le \tau\} = \{0\}$; $\Gamma_2 = \{k_1 : k_1 \ge 0; k_1 \cdot g_1 \le \tau\} = \{0;1\}$.

Числа k_1^* и k_2^* в этом случае будут такими: $k_1^*(k_2 = 0) = 1$; $k_2^*(k_1 = 0) = 0$, $k_2^*(k_1 = 1) = 0$, а функции $\sum_{\Gamma_j}(\square)$, j = 1, 2 примут вид: $\sum_{\Gamma_1}(\square) = \sum_{\Gamma_1} R_1^2 e^{-i\omega\cdot 2}$, $\sum_{\Gamma_2}(\square) = \sum_{\Gamma_2}\left(R_2 e^{-2i\omega} + R_1 R_2 e^{-3i\omega}\right)$.

Функция $U(\omega)$ запишется в виде: $U(\omega) = \left(-\dfrac{Q_1(\omega)}{Q_0(\omega)}\right)^2 e^{-2i\omega} - \dfrac{Q_2(\omega)}{Q_0(\omega)} e^{-2i\omega} + \dfrac{Q_1 Q_2}{Q_0^2} e^{-3i\omega}$ и тогда спектральная характеристика примет вид:

$$\Phi_\tau(\omega) = \frac{G(\omega)\cdot P(\omega)}{Q_0^2(\omega)} + e^{i\omega\tau}\frac{\left[Q_1^2(\omega)e^{-2i\omega} - Q_0(\omega)Q_2(\omega)e^{-2i\omega} + Q_1(\omega)Q_2(\omega)e^{-3i\omega}\right]}{Q_0^2(\omega)}, \qquad (14)$$

а функция $\Psi_\tau(\omega)$, соответственно, запишется в виде:

$$\Psi_\tau(\omega) = \left\{ e^{i\omega\tau}\left[Q_0(\omega) - Q_1(\omega)e^{-i\omega}\right] - P(\omega) \right\} / \left(Q_0^2(\omega)\cdot \bar{G}(\omega)\right) . \qquad (15)$$

Как уже отмечалось, в случае $0 < \tau < 1$ корень $\omega_0 = -B/A$ многочлена $Q_0(\omega)$ расположен в H^{+}, поэтому спектральная характеристика $\Phi_\tau(\omega)$, задаваемая формулой (12), является аналитической в нижней полуплоскости. Поэтому $N+1=2$ неизвестных коэффициентов многочлена $P_0(\omega) = E\omega + H$

следует находить из условий аналитичности функции $\Psi_\tau(\omega)$ вида (15) в H^+. Этими условиями будут, очевидно, обращение в нуль числителя функции $\Psi_\tau(\omega)$ и её первой производной в двукратном корне $\omega_0 = -B/A$ знаменателя этой функции:

$$\left\{e^{i\omega\tau}\left[Q_0(\omega) - Q_1(\omega)e^{-i\omega}\right] - E\omega - H\right\}_{\omega_0=-B/A} = 0$$

$$\left\{e^{i\omega\tau}\left[Q_0(\omega) - Q_1(\omega)e^{-i\omega}\right] - E\omega - H\right\}'_{\omega_0=-B/A} = 0$$

Решением этой системы являются следующие коэффициенты многочлена $P_0(\omega) = E\omega + H$:

$$E = æi(\tau - 1) + A\cdot\lambda \ ; \ \ H = B\lambda + æ\left\{1 + \left[Bi(\tau-1)\right]/A\right\}; \qquad (16)$$

где $æ = -2ae^{Bi(\tau-1)/A}$; $\lambda = e^{-i\tau B/A}$;

Итак, спектральная характеристика экстраполяции $\Phi_\tau(\omega)$ задается формулой (11) при $0<\tau<1$ и формулой (14) при $1\le\tau<2$, где коэффициенты α, E и H задаются в виде (13) и (16) соответственно.

Для того, чтобы понять структуру оптимального экстраполятора, подставим в спектральное представление (1) экстраполятора формулу спектральной характеристики (11) (при $0<\tau<1$) или (14) ($1\le\tau<2$):

При $0<\tau<1$

$$\tilde{\xi}(t;\tau) = \tilde{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\cdot\alpha dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a\cdot\alpha e^{i\omega(t-1)}dZ(\omega)}{A\omega+B} + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C\omega+D}{A\omega+B}e^{-2i\omega}\cdot e^{i\omega t}dZ(\omega) -$$

$$-2a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t+\tau-1)}dZ(\omega)}{A\omega+B} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(C\omega+D)e^{i\omega(t+\tau-2)}}{A\omega+B}dZ(\omega) = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5\ ; \qquad (17)$$

При $1\le\tau<2$

$$\tilde{\xi}(t;\tau) = \tilde{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{E\omega}{A\omega+B}e^{i\omega t}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2aEe^{i\omega(t-1)}}{(A\omega+B)^2}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(C\omega+D)}{(A\omega+B)^2}e^{i\omega(t-2)}dZ(\omega) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H}{A\omega+B}e^{i\omega t}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2aHe^{i\omega(t-1)}}{(A\omega+B)^2}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(C\omega+D)}{(A\omega+B)^2}e^{i\omega(t-2)}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4a^2e^{i\omega(t+\tau-2)}}{(A\omega+B)^2}dZ(\omega) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(C\omega+D)}{(A\omega+B)}e^{i\omega(t+\tau-2)}dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a(C\omega+D)}{(A\omega+B)^2}e^{i\omega(t+\tau-3)}dZ(\omega) = J_6+J_7+J_8+\ldots+J_{14}\cdot \ (18)$$

Из формул (17) и (18) видим, что в интегралах J_3, J_5 и J_{13} подынтегральные выражения содержат неправильные рациональные дроби вида $(\beta\omega+\delta)/(A\omega+B)=(\beta\omega+\delta)/\{A[\omega+(B/A)]\}$. Обращая их в правильные дроби, получим $(\beta/A)+\vartheta/\{A[\omega+(B/A)]\}$. Все остальные интегралы содержат подынтегральные функции вида $\Theta/(A\omega+B)^2$ или $(\eta\omega+\mu)/(A\omega+B)^2$. Разлагая последние на простейшие дроби, получим:

$$\frac{\eta\omega+\mu}{(A\omega+B)^2}=\frac{q_1}{A\omega+B}+\frac{q_2}{(A\omega+B)^2}=\frac{q_1}{A^2\left[\omega-\left(-\frac{B}{A}\right)\right]}+\frac{q_2}{A^2\left[\omega-\left(-\frac{B}{A}\right)\right]^2}=\frac{q_1}{A^2(\omega-\gamma i)}+\frac{q_2}{A^2(\omega-\gamma i)^2},$$

где обозначено $-B/A=\gamma i$.

Воспользовавшись далее представлением:

$$\frac{1}{(\omega-\gamma i)^\nu}=\int_0^\infty\frac{i^\nu}{(\nu-1)!}s^{\nu-1}\cdot e^{-\gamma s}\cdot e^{-i\omega s}ds\ ,\ \nu=1,\,2,\,3\ldots\ , \qquad (19)$$

выразим каждый из интегралов J_k, $k = 1, 2\ldots 14$ через случайный процесс $\xi(s)$. Продемонстрируем вышесказанное на примере последнего интеграла J_{14} .

Итак,

$$J_{14}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a(C\omega+D)}{(A\omega+B)^2}e^{i\omega(t+\tau-3)}dZ(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2a(C\omega+D)}{A^2(\omega-\gamma i)^2}e^{i\omega(t+\tau-3)}dZ(\omega)\ . \qquad (20)$$

Рассмотрим подынтегральную рациональную функцию и разложим её на простейшие дроби:

$$(C\omega+D)/\left[A^2(\omega-\gamma i)^2\right]=q_1/\left[A^2(\omega-\gamma i)\right]+q_2/\left[A^2(\omega-\gamma i)^2\right].$$

Нетрудно заметить, что $q_1=C$, $q_2=D+C\gamma i$.

Тогда

$$J_{14}=\frac{2a}{A^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{(\omega-\gamma i)}e^{i\omega(t+\tau-3)}dZ(\omega)+\frac{2a(D+C\gamma i)}{A^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t+\tau-3)}dZ(\omega)}{(\omega-\gamma i)^2}\ . \qquad (21)$$

Заменяя рациональные дроби $1/(\omega-\gamma i)$ и $1/(\omega-\gamma i)^2$ в двух интегралах формулы (21) несобственными интегралами вида (19) при $\nu = 1$ и, соответственно, $\nu = 2$, получим:

$$J_{14}=\frac{2aCi}{A^2}\int_0^{\infty}e^{-\gamma s}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t+\tau-3-s)}dZ(\omega)\right]ds-\frac{2a(D+C\gamma i)}{A^2}\int_0^{\infty}e^{-\gamma s}\cdot s\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t+\tau-3-s)}dZ(\omega)\right]ds.$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, в силу спектрального представления (2) процесса $\xi(u)$ представляют его значения в точке $u=t+\tau-3-s$, поэтому интеграл J_{14} запишется в следующем окончательном виде:

$$J_{14}=\frac{2aCi}{A^2}\int_0^{\infty}e^{-\gamma s}\xi(t+\tau-3-s)ds-\frac{2a(D+C\gamma i)}{A^2}\int_0^{\infty}se^{-\gamma s}\cdot\xi(t+\tau-3-s)ds\ .$$

Аналогичным образом вычисляются остальные тринадцать интегралов, так что окончательно формулы (17) и (18) для оптимального экстраполятора примут вид:

При $0<\tau<1$

$$\tilde{\xi}(t;\tau)=\tilde{\xi}(t+\tau)=\alpha\xi(t)+\frac{\alpha C}{A}\xi(t-2)-\frac{C}{A}\xi(t+\tau-2)+\sum_{j=1}^{4}W_j\cdot\int_0^{\infty}e^{-\gamma s}\xi(t_j-s)ds, \quad (22)$$

где $t_1=t-1$, $t_2=t-2$, $t_3=t+\tau-1$, $t_4=t+\tau-2$, $W_1=-\alpha W_3$, $W_2=-\alpha W_4$, $W_3=2ai/A$, $W_4=i(BC-AD)/A^2$, α задается формулой (13).

При $1\le\tau<2$

$$\tilde{\xi}(t;\tau)=\tilde{\xi}(t+\tau)=\frac{E}{A}\xi(t)-\frac{C}{A}\xi(t+\tau-2)+\sum_{j=1}^{5}F_j\cdot\int_0^{\infty}e^{-\gamma s}\xi(z_j-s)ds+\sum_{j=2}^{5}M_j\cdot\int_0^{\infty}se^{-\gamma s}\xi(z_j-s)ds. \quad (23)$$

где $z_1=t$, $z_2=t-1$, $z_3=t-2$, $z_4=t+\tau-2$, $z_5=t+\tau-3$, $M_2=-2a(H+E)/A^2$, $M_3=-\varphi(E+H)$, $M_4=-4a^2/A^2$, $M_5=-2a\varphi$, $F_1=i(AH-EB)/A^2$, $F_2=0$, $F_3=iC(E+H)/A^2$, $F_4=-A\varphi i$, $F_5=2aCi/A^2$, $\varphi=(D+C\gamma i)/A^2$, E и H задаются формулой (16).

Заключение. Таким образом, из формул (22) и (23) видим, что оптимальный линейный экстраполятор $\tilde{\xi}(t;\tau)$, построенный по всему прошлому процесса $\xi(s)$, будет представляться в виде суммы линейной комбинации значений самого процесса в моменты t, $t-2$, $t+\tau-2$, в случае $0<\tau<1$ и в моменты t и $t+\tau-2$ в случае $1\le\tau<2$ и интеграла с экспоненциально затухающей весовой функцией, распространенного по всему прошлому процесса. Экспоненциальное затухание весовой функции

$e^{-\gamma s}$ определяется тем фактом, что $\gamma i = -B/A$, поэтому $\gamma i \cdot i \cdot s = -\gamma s = -Bis/A = \left\{ id(b-a) - \left[d^2 - (b-c)(c-a) \right] \right\} \cdot s \Big/ \left[d^2 + (b-c)^2 \right]$.

Поскольку для фрактальных процессов параметр d на порядок превосходит параметры a, b, c, то $(-\gamma s)$ будет меньше нуля в силу $s > 0$ и отрицательной действительной части числа $(-\gamma s)$. Более того, быстрота убывания весовой функции будет определяться мнимой частью комплексного числа $(-\gamma s)$, то есть числом $\left[id(b-a) \right] \Big/ \left[d^2 + (b-c)^2 \right]$.

Литература

1. Yaglom A.M. An Introduction to the Teory of Stationaty Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 247p.

2. Yaglom A.M. Outline of Some Topics in Linear Extrapolation of Stationary Random Processes. Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1966. pp. 259 – 278.

3. Григорьев С.В. Экстраполяция процессов со спектральной плотностью, знаменателем которой является квазиполином // Известия вузов. Математика. №6(181). 1977. С. 26-34.

4. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

5. Фадеева Л.Ю. Экстраполяция видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью // Инженерный вестник Дона. 2025. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082.

6. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля // ДАН СССР, 1974. Т. 215, №5, С.1054-1057.

7. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352с.

8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. Институт компьютерных исследований, Москва, 2002. 656 с.

9. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН, Сер. «Прикладная и компьютерная математика», 2004. Т.3, №1. С.30-44.

10. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981. 256 с.

11. Титов А.Н., Фадеева Л.Ю. Алгоритм реализации оптимального оператора фильтрации с прогнозом по его синтезированной математической модели для L-марковского процесса с квазирациональным спектром. // Инженерный вестник Дона. 2025. №10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2025/10463.

References

1. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 247p.

2. Yaglom A.M. Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1966. pp. 259 – 278.

3. Grigor'ev S.V. Izvestija vuzov. Matematika. №6 (181). 1977. pp. 26-34.

4. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyj. T.4. №4 (2024): vypusk 14. pp. 1-8.

5. Fadeeva L. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082.

6. Molchan G.M. DAN SSSR, 1974. T. 215, №5. pp.1054-1057.

7. Kronover R.M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of theory.] M.: Postmarket, 2000. 352p.

8. Mandel'brot B. Fraktal'naja geometrija prirody [Fractal geometry of nature] Per. s angl. Institut komp'juternyh issledovanij, Moskva, 2002. 656 p.

9. Dubovikov M.M., Krjanev A.V., Starchenko N.V. Vestnik RUDN, Ser. «Prikladnaja i komp'juternaja matematika», 2004. T.3, №1. pp.30-44.

10. Rozanov JU.A. Markovskie sluchajnye polja [Markov random fields]. M.: Nauka, 1981. 256 p.

11. Titov A.N., Fadeeva L.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2025/10463.

Дата поступления: 25.12.2025

Дата публикации: 22.02.2026