

О моделировании гистерезисных характеристик в задачах синтеза нелинейных систем автоматического управления

Н.Л. Гречкин, Е.Ю. Ватаева

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического
приборостроения*

Аннотация: Предлагается алгоритм моделирования гладких гистерезисных нелинейностей, с учётом коэффициента наклона k и уровня насыщения c . Разработанная модель обеспечивает точность, и удобство настройки при сохранении интуитивно понятных физических параметров петли гистерезиса, что делает её эффективной для практического применения в задачах анализа и синтеза нелинейных систем управления.

Ключевые слова: однозначные нелинейности, гистерезис, систем автоматического управления, люфт с насыщением, неоднозначные нелинейности, алгоритм, моделирование систем автоматического управления, реле, статическая характеристика, аппроксимация

Нелинейные характеристики в статическом режиме делятся на однозначные (каждому значению входа x соответствует единственное значение выхода y) и неоднозначные (одному x соответствуют несколько устойчивых значений y), что усложняет анализ систем [1,2]. Неоднозначные характеристики классифицируют на гладкие (непрерывные, с производной во всех точках) и кусочно-линейные (с прямолинейными участками и изломами), часто встречающиеся в релейных элементах, механизмах с люфтом и зонах сухого трения. Особое место занимают релейные характеристики с гистерезисом ($x_{ср} > x_{отп}$), где сигнал срабатывания ($x_{ср}$) отличается от сигнала отпускания ($x_{от}$), и без гистерезиса ($x_{ср} = x_{отп}$), широко применяемые в недорогих и простых системах автоматического управления на базе электромагнитных и других реле [3,4].

Поскольку процесс срабатывания и отпускания в реальном реле происходит не мгновенно, а за определённое время $t_{ср}$ и $t_{отп}$, то характерная кривая статической характеристики приобретает наклонную форму из-за инерционности реле (рис.1, D, E, F) [5].

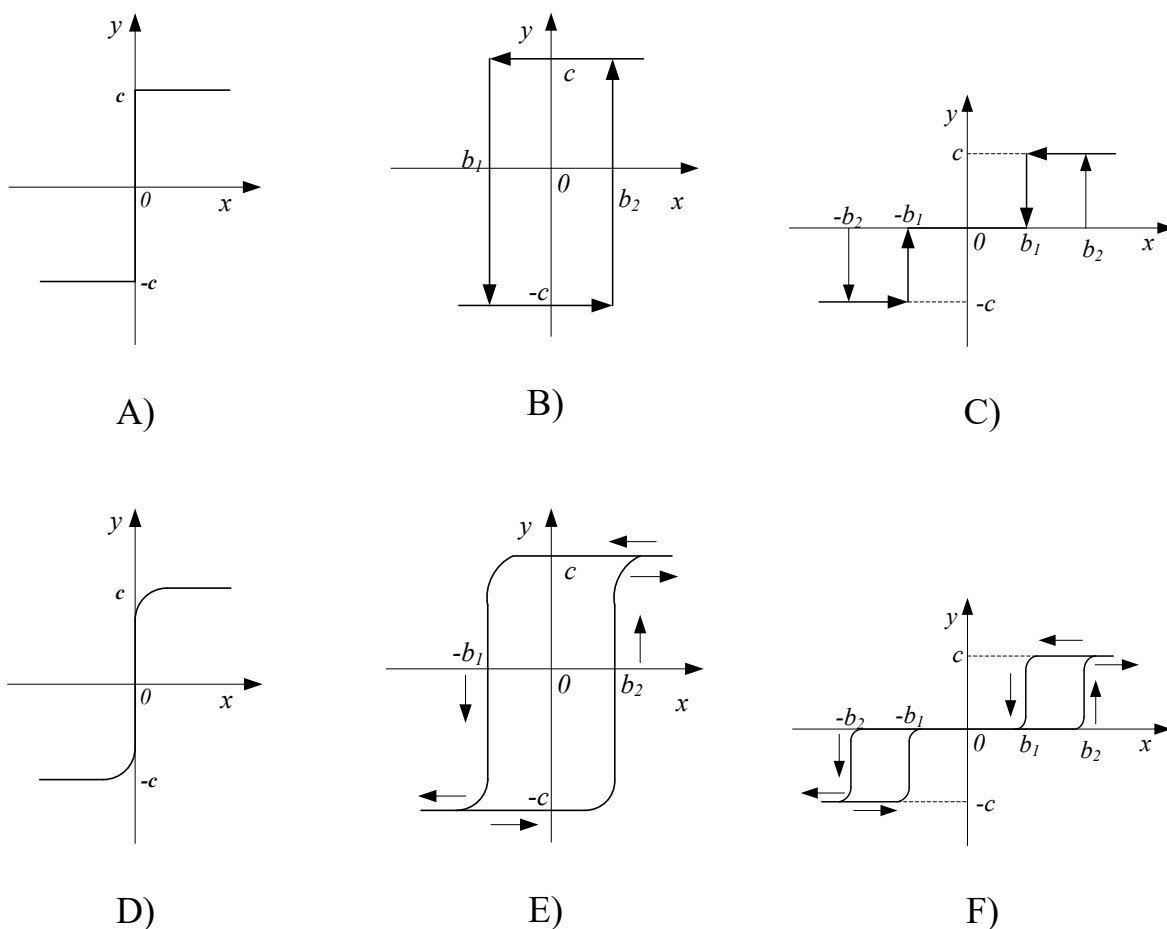


Рис.1. – Нелинейные функции

Гистерезис является важным свойством многих физических систем, проявляющейся в том, что состояние системы зависит не только от текущего воздействия, но и от её прошлых воздействий. Такое явление широко встречается в различных сферах науки и техники, включая магнитные материалы, механические системы с упругими деформациями, а также пьезоэлектрические и ферроэлектрические устройства [6,7].

Для описания и моделирования гистерезисных характеристик разработано множество моделей [7,8]. Однако часто для упрощения расчетов гладкие гистерезисные нелинейные функции заменяют разрывными кусочно-линейными функциями, а именно последовательно включенными нелинейными блоками «Люфт» и «Ограничение». Объединив эти нелинейности, полученную характеристику принято называть «Люфт с ограничением» (рис.2) .

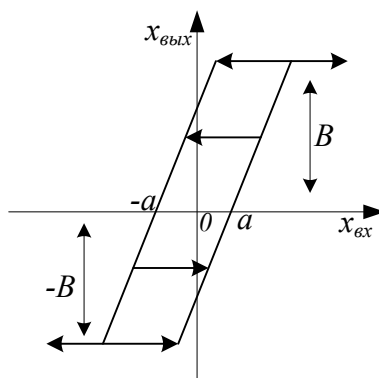


Рис.2. – Нелинейная характеристика «Люфт с насыщением»

Однако, стоит отметить, что в случаях перехода от гладкой неоднозначной нелинейной характеристики к кусочно-линейной снижается точность отображения изменений выходного сигнала, а также исчезают характерные для гладких неоднозначных нелинейных функций качественные признаки.

Аналитически нелинейность «Люфт с насыщением» определяется следующими зависимостями:

$$F(x_{ex}) = \begin{cases} x_{ex} = k(x_{ex} - a), & \frac{dx_{ex}}{dt} > 0 \quad u \quad -\left(\frac{B}{k} - a\right) \leq x_{ex} \leq \left(\frac{B}{k} + a\right); \\ x_{ex} = B, & \frac{dx_{ex}}{dt} > 0 \quad u \quad x_{ex} \geq \left(\frac{B}{k} + a\right); \\ x_{ex} = -B, & \frac{dx_{ex}}{dt} > 0 \quad u \quad x_{ex} \leq -\left(\frac{B}{k} - a\right); \\ x_{ex} = k(x_{ex} + a), & \frac{dx_{ex}}{dt} < 0 \quad u \quad -\left(\frac{B}{k} + a\right) \leq x_{ex} \leq \left(\frac{B}{k} - a\right); \\ x_{ex} = B, & \frac{dx_{ex}}{dt} < 0 \quad u \quad x_{ex} \geq \left(\frac{B}{k} - a\right); \\ x_{ex} = -B, & \frac{dx_{ex}}{dt} < 0 \quad u \quad x_{ex} \leq -\left(\frac{B}{k} + a\right); \\ \frac{dx_{ex}}{dt} = 0, & |kx_{ex} - x_{ex}| < ka \quad u \quad x_{ex} \leq \left|\frac{B}{k} + a\right|. \end{cases}$$

В случае, когда при синтезе системы управления для повышения точности необходимо сохранить гладкость гистерезисной характеристики, а также учесть наклон промежуточных ветвей [9], может быть использован следующий подход: ветви гистерезисной характеристики аппроксимируются с помощью подходящих функций, определяется величина насыщения c , коэффициент наклона промежуточных ветвей k , после чего применяется алгоритм, представленный на рис.3.

Данная методика отличается простотой реализации и удобством настройки, что позволяет быстро и эффективно моделировать поведение нелинейных систем с гистерезисом без необходимости глубокого понимания сложных физических процессов этого явления. В отличие от существующих моделей [9,10], предложенная гистерезисная модель использует основные

интуитивно понятные параметры петли гистерезиса, что облегчает её адаптацию под конкретные задачи при сохранении достаточной точности для большинства практических случаев.

На рис.4 показан результат работы алгоритма при входном воздействии в виде убывающей синусоиды и при аппроксимации экспериментальных данных восходящей и убывающей ветвей полиномами 15-й степени.

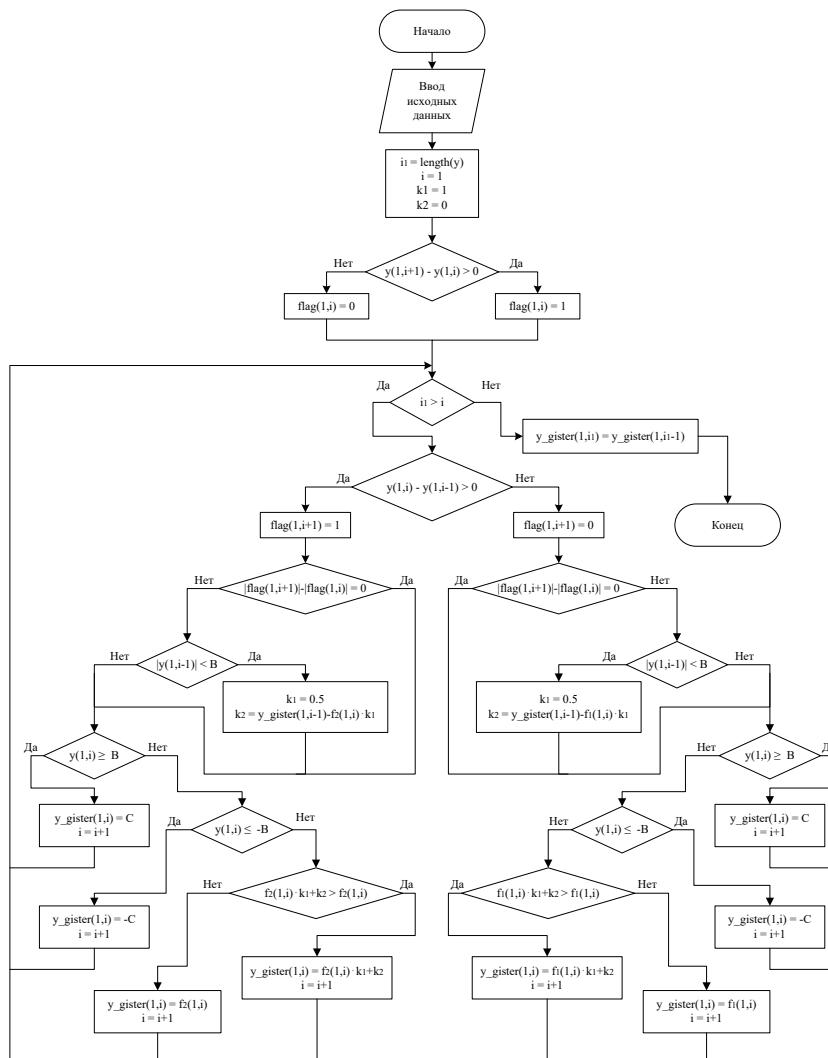


Рис.3. – Алгоритм для реализации нелинейности «Гладкий гистерезис с насыщением»

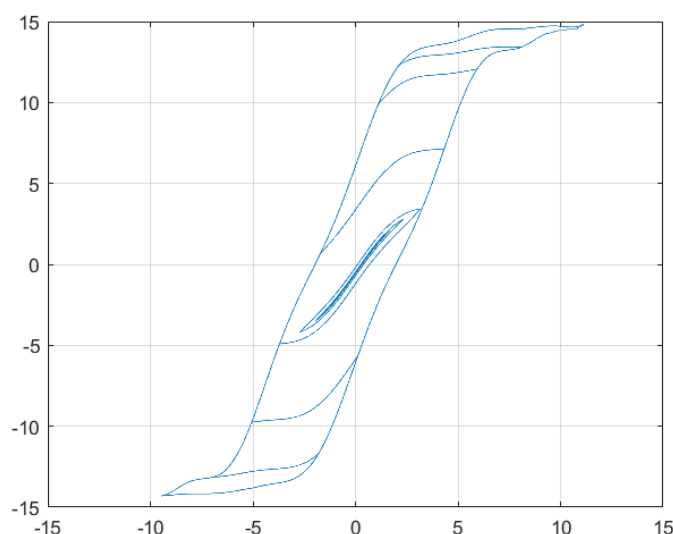


Рис.4. – Полученная гистерезисная характеристика

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет строить гладкую гистерезисную нелинейность с учётом уровня насыщения s и коэффициента наклона k промежуточных участков. Разработанный алгоритм позволяет сохранить точность при минимальном числе параметров, что существенно упрощает его настройку и интеграцию в программные комплексы моделирования. Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного подхода для анализа и синтеза нелинейных систем управления, содержащих элементы с выраженным гистерезисом.

Литература

1. Попешкин М.С., Сидоренко В.С. Математическое моделирование автоматизированного позиционного гидропривода целевых механизмов машин с контуром гидравлического управления повышенной эффективности // Инженерный вестник Дона. 2012. №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/947 (доступ свободный)

2. Antonella Ferrara, Gian Paolo Incremona, Nonlinear Sliding Mode Control, Editor(s): Zhengtao Ding, Encyclopedia of Systems and Control Engineering (First Edition), Elsevier, 2026, Pages 100-111, ISBN 9780443140808, doi.org/10.1016/B978-0-443-14081-5.00146-X

3. Абрамкин С.Е., Душин С.Е., Разработка комплексных алгоритмов для автоматизированных технологических комплексов, Проектирование и обеспечение качества информационных процессов и систем. Сборник докладов Международной конференции. Санкт-Петербург, 2022. С. 58-61.

4. Huu-Thinh Do, Franco Blanchini, Ionela Prodan, Nonlinear Constrained Control Systems, Editor(s): Zhengtao Ding, Encyclopedia of Systems and Control Engineering (First Edition), Elsevier, 2026, Pages 112-128, ISBN 9780443140808, doi.org/10.1016/B978-0-443-14081-5.00165-3.

5. Гречкин, Н.Л., Ватаева, Е.Ю., Шишлаков, В.Ф. Алгоритм вычисления точек переключения нелинейности «трехпозиционное реле с гистерезисом» // Датчики и системы. – 2025. №4 (282). С. 45-50.

6. Дыбок В.В., Ходунков В.П., Баскаков В.А., Перспективные технические решения в синтезе следящих систем автоматического управления, Техничко-технологические проблемы сервиса. 2014. № 1 (27). С. 53-56.

7. Шахрай, Е. А., Лубенцов, В. Ф., Лубенцова, Е. В. Синтез модифицированного ПИД-регулятора в условиях многорежимности функционирования зашумленного объекта // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". 2021. № 1. С. 99-108.

8. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных уравнений нелинейными Лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона. 2014. №1. URL: www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251.

9. Никитин А.В., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография. СПб: СПбГУАП., 2003. 358 с.

10. Гречкин Н.Л., Ватаева Е.Ю. Алгоритмы модулей для реализации амплитудно-импульсной модуляции. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025;52(3):29-37.

References

1. Popeshkin M.S., Sidorenko V.S. Inzhenernyy vestnik Dona. 2012. №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/947

2. Antonella Ferrara, Gian Paolo Incremona, Nonlinear Sliding Mode Control, Editor(s): Zhengtao Ding, Encyclopedia of Systems and Control Engineering (First Edition), Elsevier, 2026, Pages 100-111, ISBN 9780443140808, doi.org/10.1016/B978-0-443-14081-5.00146-X

3. Kuznetsov K.K. Inzhenernyj vestnik Dona, 2009, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2009/250/.

4. Abramkin S.E., Dushin S.E. Sbornik докладов Mezhdunarodnoy konferentsii. Sankt-Peterburg, 2022. pp. 58-61.

5. Grechkin N.L., Vataeva E.Yu., Shishlakov V.F. Datchiki i sistemy. 2025. №4 (282). pp. 45-50.

6. Dybok V.V., Khodunkov V.P., Baskakov V.A. Tekhniko-tehnologicheskie problemy servisa. 2014. № 1 (27). pp. 53-56

7. Shakhray E. A., Lubentsov V. F., Lubentsova E. V. Elektronnyy setevoy politematicheskiy zhurnal "Nauchnye trudy KubGTU". 2021. № 1. pp. 99-108.

8. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Lazarenko S.V., Tsennykh B.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251

9. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. Parametricheskiy sintez nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya: monografiya. [Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems: monograph]. SPb: SPbGUAP., 2003. 358 p.

10. Grechkin N.L., Vataeva E.Yu. Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. 2025; 52(3) URL: vestnik.dgtu.ru/jour/article/view/1836

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-20230003, "Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем 1 космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга".

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 17.11.2025

Дата публикации: 26.12.2025