

## Определение напряжённно-деформированного состояния породного массива в окрестности подземного сооружения с анкерно-бетонной крепью

А.Н. Панкратенко<sup>1</sup>, М.В. Плешко<sup>2</sup>, А.А. Насонов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»*

<sup>2</sup> *Ростовский государственный университет путей сообщения*

<sup>3</sup> *Шахтинский институт (филиал) Южно-Российского государственного политехнического университета (НПИ) имени М.И. Платова*

**Аннотация:** При проходке подземных сооружений во многих случаях применяют анкера и бетонную крепь. Эффективность их совместной работы определяет устойчивость подземного сооружения при длительной эксплуатации. В статье рассмотрена расчетная схема определения напряжений в породном массиве в окрестности подземного сооружения круглой формы с анкерно-бетонной крепью. В процессе деформирования анкеров в стержнях развиваются растягивающие усилия, препятствующие дальнейшему смещению породного контура. Таким образом, влияние анкеров можно представить в виде системы сосредоточенных сил, действующих вдоль их стержней. С учетом этих предпосылок, получены выражения для определения компонентов напряжений и радиального перемещения в произвольной точке породного массива, вызванных влиянием анкеров.

**Ключевые слова:** подземное сооружение, напряженно-деформированное состояние, породный массив, бетонная крепь, анкера.

Проходка тоннелей, стволов и других подземных сооружений во многих случаях осуществляется с анкерным упрочнением пород до возведения основной крепи или обделки [1-4]. В результате формируется система «породный массив – анкера – бетонная крепь (обделка)», параметры напряженно-деформированного состояния которой определяют устойчивость подземного сооружения при длительной эксплуатации [5-6].

Рассмотрим задачу по определению напряженно-деформированного состояния этой системы для случая подземного сооружения круглой формы и гидростатического распределения напряжений (рис. 1).

В соответствии с современными подходами геомеханики задача решается в следующей постановке:

- бетонная крепь и породный массив рассматриваются как весомая совместно линейно деформируемая среда;

- анкеры контактного типа испытывает продольные деформации, вызываемые смещением массива и крепи;
- принято условие равенства точек заделки анкера в скважине и соответствующих точек породного массива.

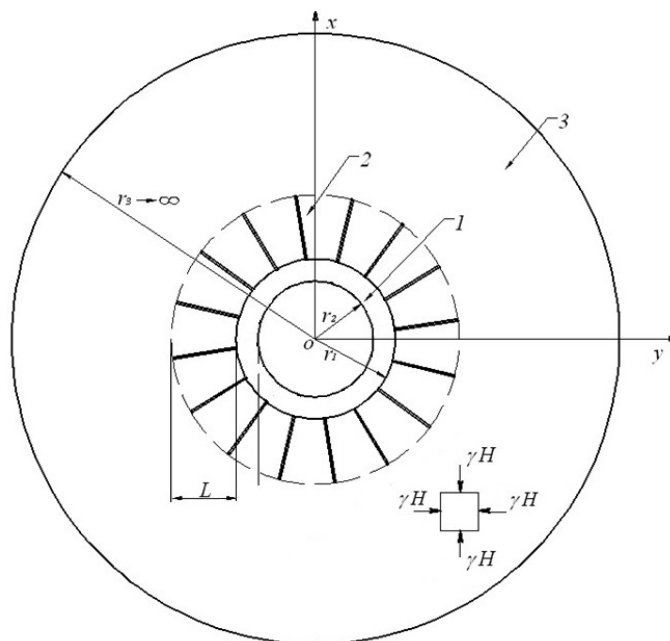


Рис. 1. – Расчетная схема анкерно-бетонной крепи подземного сооружения:  
 1 - бетонная крепь; 2 - породный массив, упрочнённый анкерами; 3 - однородный массив

В процессе деформирования анкеров в стержнях развиваются растягивающие усилия, препятствующие дальнейшему смещению породного контура. Таким образом, в расчетной схеме (рис. 1) анкера можно представить в виде системы сосредоточенных сил, действующих вдоль стержня анкера. Эффект отпора крепи в свою очередь представляется в виде равномерно распределенного давления на контур выработки (рис. 2).

Условие совместности перемещений точек заделки анкера в скважине и соответствующих точек породного массива имеет вид:

$$\Delta_{i,i+1}^j = \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^M P_{kp} (U_{i+1}^{kp} - U_{ij}^{kp}) + (U_{i+1,j}^0(\gamma H) - U_{ij}^0(\gamma H)) + (U_{i+1,j}^1(\gamma H) - U_{ij}^1(\gamma H)), \quad (1)$$

где  $U_{i+1}^{kp}, U_{ij}^{kp}$  – перемещения вдоль продольной оси стержня анкера ( $i+1$ ) и

$i$ -й точек заделки  $j$  - того анкера под действием единичной силы, приложенной в  $p$ -й точке  $k$  - го стержня соответственно;

$U_{i+1,j}^0, U_{ij}^0$  – перемещения этих же точек под действием гидростатического поля напряжений до возведения бетонной крепи;

$U_{i+1,j}^1, U_{ij}^1$  – перемещения этих же точек под действием гидростатического поля напряжений после возведения бетонной крепи;

$P_{kp}$  – значения усилий, возникающих в точках заделки анкерных стержней;

$\gamma$  – удельный объемный вес пород;

$H$  – глубина заложения подземного сооружения;

$j=1,2,\dots,N; k=1,2,\dots,N; i=1,2,\dots,M; p=1,2,\dots,M;$

$N$  – количество анкерных стержней;

$M$  – количество точек закрепления анкерного стержня в массиве.

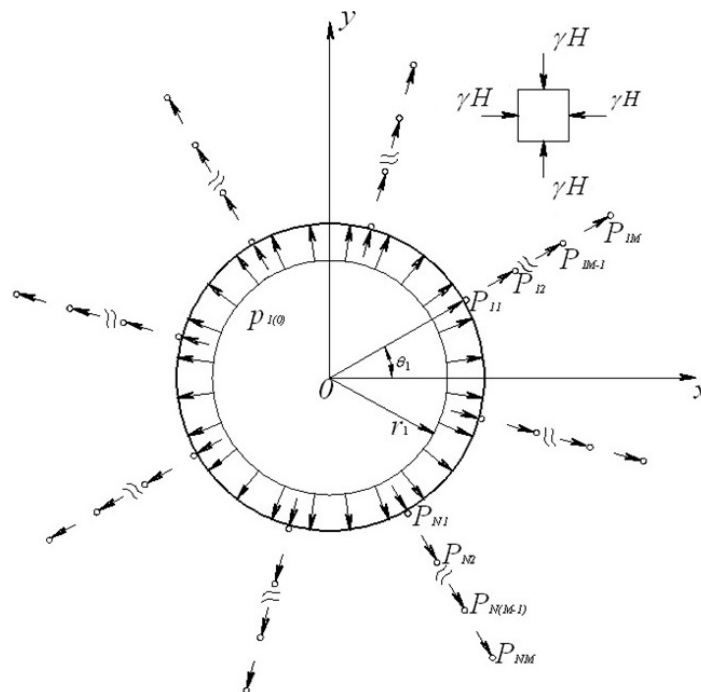


Рис. 2. – Распределение усилий в массиве вокруг ствола

Рассматривая исследуемую систему как линейно деформируемую среду с круглым вырезом, нахождение смещений (1) можно свести к решению

трех задач теории упругости: о напряженно-деформированном состоянии плоскости, ослабленной подземным сооружением круглой формы, контур которого свободен от напряжений; то же при равномерном нагружении контура; то же при действии сосредоточенной силы в произвольной точке плоскости.

Первые две задачи являются стандартными задачами механики подземных сооружений о напряженно-деформированном состоянии незакрепленной и закрепленного подземного сооружения соответственно [7].

Решение третьей задачи применительно к анкерной крепи приводилось в частности в работах Кравченко Г.И. [8], где исследовалось действие сосредоточенной силы в упругой полуплоскости, Степаняна М.Н. [9] для анкеров замкового типа и Завьялова Р.Ю. [10] для анкеров контактного действия.

Здесь рассмотрим частный случай решения задачи для контактных анкеров в случае радиальной постановки штанг относительно кольцевой выработки, что имеет место в нашем случае.

В произвольной точке  $z_0$ , имеющей полярные координаты  $r_0$ ,  $\theta_0$ , ослабленной подземным сооружением круглой формы, приложим радиально направленное усилие  $P$ . Начало координат разместим в центре отверстия радиусом  $r_1$  (рис. 3).

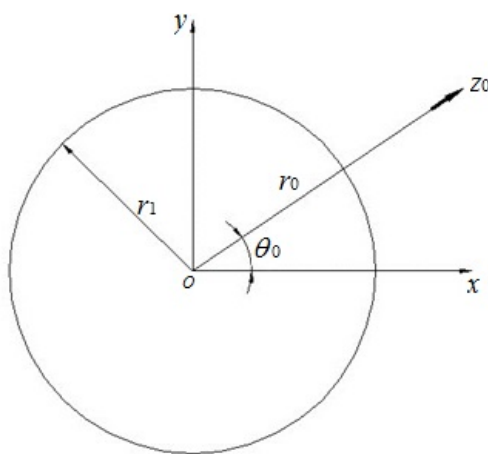


Рис. 3. – Расчетная схема действия сосредоточенной силы в плоскости, ослабленной круглым отверстием

Согласно теории упругости функции комплексных потенциалов, характеризующих напряженно-деформированное состояние неограниченной плоскости от действия сосредоточенной силы можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)} \ln(z-z_0) + \varphi_0(z); \\ \psi(z) &= \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(\chi+1)} \ln(z-z_0) + \frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)} \frac{\bar{z}_0}{z-z_0} + \psi_0(z); \end{aligned} \quad (2)$$

Введем новую переменную  $\zeta = \frac{z}{r_1}$ .

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= -\frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)} \ln(\zeta-\zeta_0) + \varphi_0(\zeta); \\ \psi(\zeta) &= \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(\chi+1)} \ln(\zeta-\zeta_0) + \frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)} \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta-\zeta_0} + \psi_0(\zeta), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $X, Y$  – соответственно проекции усилия  $P$  на действительную и мнимую оси;

$\varphi_0(\zeta), \psi_0(\zeta)$  – голоморфные функции вне контура единичной окружности, включая бесконечно удаленную точку  $\zeta_0 = z_0/r_1$ .

Введем обозначения

$$e^{i\theta_0} = \sigma_0, \quad (4)$$

тогда

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= r_0 \cdot \sigma_0, \quad \bar{\zeta}_0 = r_0 \cdot \sigma_0^{-1}; \\ X+iY &= P \cdot \sigma_0, \quad X-iY = P \cdot \sigma_0^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Контурные условия для данного случая примут вид

$$\varphi(\sigma) + \sigma \cdot \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0; \quad \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma \cdot \overline{\varphi'(\sigma)}} + \psi(\sigma) = 0. \quad (6)$$

Подставляя в (6) значения (3) получим

$$\varphi_0(\sigma) + \sigma \cdot \overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_1 + if_2; \quad \overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{1}{\sigma \cdot \varphi_0'(\sigma)} + \psi_0(\sigma) = f_1 - if_2, \quad (7)$$

где

$$f_1 + if_2 = \frac{P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \ln[\sigma - \zeta_0] - \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \ln \frac{1 - \overline{\zeta_0} \cdot \sigma}{\sigma} + \frac{P \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \frac{\sigma - \zeta_0}{1 - \overline{\zeta_0} \cdot \sigma};$$
$$f_1 - if_2 = \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \ln \frac{1 - \overline{\zeta_0} \cdot \sigma}{\sigma} - \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \ln(\sigma - \zeta_0) + \frac{P \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \frac{1 - \overline{\zeta_0} \cdot \sigma}{\sigma - \zeta_0} \frac{1}{\sigma}. \quad (8)$$

Голоморфные функции  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  определяются из выражений

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1 + if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma; \quad \psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1 - if_2}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{\zeta} \varphi_0'(\zeta), \quad (9)$$

где  $\Gamma$  – контур единичной окружности.

Учитывая, что  $\ln(\zeta - \zeta_0) = \ln(-\zeta_0) + \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0}\right)$  – голоморфна внутри  $\Gamma$ ;

$\ln \frac{1 - \zeta \cdot \overline{\zeta_0}}{\zeta} = \ln(-\overline{\zeta_0}) + \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta \cdot \zeta_0}\right)$  – голоморфна вне  $\Gamma$ ,

на основании формулы Коши получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln(\sigma - \zeta_0) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0;$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{(1 - \sigma \overline{\zeta_0})}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\ln \frac{1 - \zeta \cdot \overline{\zeta_0}}{\zeta} + \ln(-\overline{\zeta_0}). \quad (10)$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sigma - \zeta_0}{1 - \sigma \cdot \zeta_0} \sigma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1 - \overline{\zeta_0} \cdot \zeta_0}{\zeta_0^2 (1 - \overline{\zeta_0} \cdot \zeta)};$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1 - \sigma \zeta_0}{\sigma - \zeta_0} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{\zeta \cdot \zeta_0}. \quad (11)$$

Подставляя значения вычисленных интегралов получим

$$\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} (\ln \zeta - \ln(1 - \zeta \cdot \bar{\zeta}_0) + \ln(-\bar{\zeta}_0)) + \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta_0}{\bar{\zeta}_0^2 (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)}; \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} (\ln \zeta - \ln(1 - \zeta \cdot \bar{\zeta}_0) + \ln(-\bar{\zeta}_0)) - \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta_0}{\bar{\zeta}_0 \cdot \zeta (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)^2} - \\ &- \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \left( \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)} + \frac{1}{\zeta^2} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

Значения комплексных потенциалов, определяющих напряженно-деформированное состояние плоскости, ослабленной подземным сооружением, от действия сосредоточенного усилия в произвольной точке плоскости получим путем подстановки  $\varphi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$ :

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} (\ln \zeta - \ln(1 - \zeta \cdot \bar{\zeta}_0) + \ln(-\bar{\zeta}_0)) + \\ &+ \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta_0}{\bar{\zeta}_0^2 (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)}; \\ \psi(\zeta) &= \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} \left( \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta \cdot \zeta_0} \right) - \frac{\chi \cdot P \cdot \sigma_0}{2\pi(\chi+1)} * \\ &* \left( \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)} + \frac{1}{\zeta^2} \right) - \frac{P \cdot \sigma_0^{-1}}{2\pi(\chi+1)} \left( \ln \zeta - \ln(1 - \zeta \cdot \bar{\zeta}_0) + \ln(-\bar{\zeta}_0) + \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta_0}{\bar{\zeta}_0 \cdot \zeta (1 - \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta)^2} \right).\end{aligned}\quad (13)$$

Связать комплексные потенциалы с параметрами напряженно-деформированного состояния породного массива можно с помощью известных формул Колосова-Мусхелишвили:

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega(\zeta)}; \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\zeta)} \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)} \varphi''(\zeta) \omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta) \overline{\omega''(\zeta)}}{[\omega'(\zeta)]^2} + \psi'(\zeta) \right]; \\ 2G(u - iv) &= \chi \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}.\end{aligned}\quad (14)$$

Решая уравнения (14) можно получить компоненты нормальных  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и касательного  $\tau_{r\theta}$  напряжений в полярной системе координат  $(r, \theta)$ .

Выражения для данных напряжений представим в виде

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{P}{2\pi(\chi+1)r_1} \left[ \frac{r/r_1 \cdot \cos(\theta - \theta_0) - r_0/r_1}{c_1} + \chi \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \cdot \left( \frac{r/r_1 \cdot \cos(\theta - \theta_0) - r_0/r_1}{c_1 \cdot c_2} - \frac{r^2 \cdot r_0/r_1^3 \cdot \cos 2(\theta - \theta_0) - r_0^2 \cdot r/r_1^3 \cdot \cos(\theta - \theta_0)}{c_1 \cdot c_2} \right) + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \cdot \left( \frac{\cos(\theta - \theta_0)(1 - 2r \cdot r_0/r_1^2) - r_0^2 \cdot r^2/r_1^4 \cos 2(\theta + 2\theta_0)}{r_0/r_1 \cdot c_2^2} \right) \right]; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta = & \frac{P}{2\pi(\chi+1)r_1} \left\{ \frac{r}{r_1} \left[ \frac{(r^2/r_1^2 - 2r_0 \cdot r/r_1^2) \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2/r_1^2 \cdot \cos(\theta_0 - \theta)}{c_1^2} - \right. \right. \\ & - \left. \left( 1 - \frac{r_0^4}{r_1^4} \right) \left( \frac{A \cos(\theta - \theta_0 - B \cos 2(\theta - \theta_0)) + r_0^2/r_1^2 \cos 2(\theta_0 - \theta) - C \cos(\theta_0 - \theta) + r_0^2 r^4/r_1^6 \cos 2(\theta - \theta_0)}{c_1^2 c_2^2} \right) \right. \\ & + \left. \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \frac{2r_0 r}{r_1^2} \left( \frac{A - B \cos(\theta - \theta_0) - C \cos(\theta_0 - \theta) + r_0^2/r_1^2 \cos 2(\theta_0 - \theta) + r_0^2 r^4/r_1^6 \cos 2(\theta - \theta_0)}{c_1^2 c_2^2} \right) \right. \\ & + \left. 2 \frac{r}{r_1} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{\cos(\theta_0 - \theta) - r_0^3 r^3/r_1^6 \cos(2\theta - \theta_0) + 3(r_0^2 r^2/r_1^4 - r_0 r/r_1^2) \cos(\theta - \theta_0)}{c_2^3} \right) \right] + \\ & + \chi \frac{r_1 r \cos(\theta_0 - \theta) - r_0/r_1 \cos 2(\theta_0 - \theta)}{c_1} - \frac{r_0}{r_1^3} \cdot \frac{r^2 - 2r_0 r \cos(\theta_0 - \theta) + r_0^2 \cos 2(\theta_0 + \theta)}{c_1^2} - \\ & - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{r/r_1 \cos(\theta_0 - \theta) - r_0/r_1 \cos(\theta - \theta_0) - r^2 r_0/r_1^3 \cos(\theta_0 - \theta) - r_0^2 r/r_1^3}{c_1 c_2} \right) + \\ & + \frac{r_1^3}{r_0 r^2} - \chi \left[ \frac{-2(\cos(\theta - \theta_0) - 2r_0 r/r_1^2 \cos 2(\theta - \theta_0) + r_0^2 r^2/r_1^4 \cos 3(\theta - \theta_0))}{r^3/r_1^3 c_2^2} + \right. \\ & + \left. \frac{3r_0 r/r_1^2 (1 - 2r_0 r/r_1^2 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 r^2/r_1^4 \cos 2(\theta - \theta_0))}{r^3/r_1^3 c_2^2} \right] + \\ & + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \frac{r_1^3}{r_0 r^2} \left( \frac{(\cos(\theta - \theta_0) - r_0^3 r^3/r_1^6 \cos 3(\theta - \theta_0) + 3r_0^2 r^2/r_1^4 \cos 2(\theta - \theta_0) - r^2 r_0/r_1^3 \cos(\theta_0 - \theta))}{c_2^3} - \right. \\ & - \left. \frac{r_0^2 r/r_1^3}{c_2^3} \right) - 3 \frac{r_1}{r} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{\cos(\theta_0 - \theta) - r_0^3 r^3/r_1^6 \cos 2(\theta - \theta_0)}{c_2^3} + \right. \end{aligned}$$



$$\left. + \frac{3r_0^2 r^2 / r_1^4 \cos(\theta - \theta_0) - 3r_0 r / r_1^2}{c_2^3} \right\}; \quad (16)$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{2\pi(\chi + 1)} \frac{1}{r_1} \left\{ r \left[ - \frac{r^2 / r_1^2 \sin(\theta - \theta_0) - 2r_0 r / r_1^2 \sin(\theta - \theta_0)}{c_1^2} + \right. \right.$$
$$+ \frac{r_0^2 / r_1^2 \sin(\theta_0 - \theta)}{c_1^2} + \left. \left( 1 - \frac{r_0^4}{r_1^4} \right) \left( \frac{A \sin(\theta - \theta_0) - B \sin 2(\theta - \theta_0)}{c_1^2 c_2^2} + \right. \right.$$
$$+ \left. \left. \frac{r_0^2 / r_1^2 \sin 2(\theta_0 - \theta) - C \sin(\theta_0 - \theta) + r_0^2 r^4 / r_1^6 \sin 3(\theta - \theta_0)}{c_1^2 c_2^2} \right) - \right.$$
$$- \left. \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \frac{2r_0 r}{r_1^2} \left( \frac{A - B \sin(\theta - \theta_0) - C \sin(\theta_0 - \theta)}{c_1^2 c_2^2} + \right. \right.$$
$$+ \left. \left. \frac{r_0^2 / r_1^2 \sin 2(\theta_0 - \theta) + r_0^2 r^4 / r_1^6 \sin 2(\theta - \theta_0)}{c_1^2 c_2^2} \right) - 2 \frac{r}{r_1} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \times \right.$$
$$\times \left. \left( \frac{\sin(\theta_0 - \theta) - r_0^3 r^3 / r_1^6 \sin(2\theta - \theta_0) + 3r_0^2 r^2 / r_1^4 \sin(\theta - \theta_0)}{c_2^3} - \right. \right.$$
$$- \left. \left. \frac{3r_0 r / r_1^2 \sin(\theta - \theta_0)}{c_2^3} \right) \right] - \chi \frac{r / r_1 (\theta_0 - \theta) - r_0 / r_1 \sin 2(\theta_0 - \theta)}{c_1} - \frac{r_0}{r_1} \times$$
$$\times \frac{r_0^2 / r_1^2 \sin 2(\theta_0 + \theta) - 2r_0 r / r_1^2 \sin(\theta_0 - \theta)}{c_1^2} +$$
$$+ \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{r / r_1 \sin(\theta_0 - \theta) - r_0 / r_1 \sin 2(\theta_0 - \theta) - r^2 r_0 / r_1^3 \sin(\theta_0 - \theta)}{c_1 c_2} \right) +$$
$$+ \chi \left[ \frac{-2(\sin(\theta - \theta_0) - 2r_0 r / r_1^2 \sin 2(\theta - \theta_0) + r_0^2 r^2 / r_1^4 \sin 3(\theta - \theta_0))}{r^3 / r_1^3 c_2^2} + \right.$$
$$+ \left. \frac{3r_0 r / r_1^2 (r_0^2 r^2 / r_1^4 \sin 2(\theta - \theta_0) - 2r_0 r / r_1^2 \sin(\theta - \theta_0))}{r^3 / r_1^3 c_2^2} \right] -$$
$$- \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \frac{r_1^3}{r_0 r^2} \left( \frac{\sin(\theta - \theta_0) - r_0^3 r^3 / r_1^6 \sin 3(\theta - \theta_0)}{c_2^3} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3r_0^2 r^2 / r_1^4 \sin 2(\theta - \theta_0) - r^2 r_0 / r_1^3 \sin(\theta_0 - \theta)}{c_2^3} \Bigg) + \\
 & + 3 \frac{r_1}{r} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{\sin(\theta_0 - \theta) - r_0^3 r^3 / r_1^3 \sin 2(\theta - \theta_0) + 3r_0^2 r^2 / r_1^4 \sin(\theta - \theta_0)}{c_2^3} \right) \Bigg\}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

где  $c_1 = r^2 / r_1^2 + r_0^2 / r_1^2 - 2r_0 r / r_1^2 \cos(\theta - \theta_0)$ ;  $c_2 = 1 + r_0^2 r^2 / r_1^4 - 2r r_0 / r_1^2 \cos(\theta - \theta_0)$ ;  
 $A = r^2 / r_1^2 + r_0^4 r^2 / r_1^6 + 4r^2 r_0^2 / r_1^4$ ;  $B = 2r^3 r_0 / r_1^4 + 2r_0^3 r^3 / r_1^6$ ;  
 $C = 2r r_0 / r_1^2 + 2r_0^3 r / r_1^4$ . (18)

Радиальные смещения точек плоскости под действием сосредоточенной силы запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned}
 U_r = & \frac{P}{4G\pi(\chi+1)} \left\{ \chi \left[ -\cos(\theta_0 - \theta) \ln \sqrt{c_1} + \sin(\theta_0 - \theta) \operatorname{arctg}(c_3) \right] + \right. \\
 & + \chi \left( \cos(\theta_0 - \theta) \ln \sqrt{c_1 c_2} - \cos(\theta_0 - \theta) \ln(c_2) + \sin(\theta_0 - \theta) \operatorname{arctg}(c_4) + \right. \\
 & - \left. \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{\cos(\theta_0 - \theta) - r r_0 / r_1^2 \cos 2(\theta_0 - \theta)}{r_0^2 / r_1^2 c_2} \right) \right] - \\
 & - \frac{r}{r_1} \left[ \chi \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \left( \frac{r / r_1 \cos(\theta_0 - \theta) - r_0 / r_1 \cos(\theta_0 - \theta) - r^2 r_0 / r_1^3 \cos(\theta_0 - \theta)}{c_1 c_2} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{r_0^2 r / r_1^3 \cos(\theta_0 - \theta)}{c_1 c_2} \right) - \frac{r / r_1 \cos(\theta_0 - \theta) - r_0 / r_1 \cos(\theta_0 - \theta)}{c_1} + \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \times \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{1 - 2r r_0 / r_1^2 \cos(\theta_0 - \theta) - r r_0 / r_1^4 \cos 2(\theta_0 - \theta)}{r_0^2 / r_1^2 c_2} \right) \right] - \\
 & - \chi \left[ \cos(\theta_0 - \theta) \ln \sqrt{c_1} - \sin(\theta_0 - \theta) \operatorname{arctg}(c_3) \right] - \cos(\theta_0 - \theta) \ln \sqrt{c_1 c_2} + \\
 & + \cos(\theta_0 - \theta) \ln(c_2) + \sin(\theta_0 - \theta) \operatorname{arctg}(c_4) - r_1^3 / r^2 r_0 + \\
 & + \frac{r r / r_1 \cos(\theta_0 - \theta) - r_0 / r_1 \cos(\theta_0 - \theta)}{r_1 c_1} -
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & - \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \frac{r_1^2}{r r_0} \left( \frac{1 - 2r r_0 / r_1^2 \cos(\theta_0 - \theta) + r^2 r_0 / r_1^4 \cos 2(\theta_0 - \theta)}{c_2^2} \right) - \\ & - \frac{\cos(\theta_0 - \theta) - r r_0 / r_1^2 \cos 2(\theta_0 - \theta)}{r^2 / r_1^2 c_2} \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где

$$c_3 = \frac{r / r_1 \sin \theta - r_0 / r_1 \sin \theta_0}{r / r_1 \cos \theta - r_0 / r_1 \cos \theta_0};$$

$$c_4 = \frac{r / r_1 \sin(-\theta) - r_0 / r_1 \sin(-\theta_0) - r_0 r^2 / r_1^3 \sin(-\theta_0) + r_0 r^2 / r_1^3 \sin(\theta - 2\theta_0)}{r / r_1 \cos(-\theta) - r_0 / r_1 \cos(-\theta_0) - r_0 r^2 / r_1^3 \cos(-\theta_0) + r_0 r^2 / r_1^3 \cos(\theta - 2\theta_0)}.$$

Таким образом, определены компоненты напряженно-деформированного состояния породного массива в окрестности подземного сооружения круглой формы, закрепленного анкерно-бетонной крепью, с учетом влияния анкерной крепи контактного типа.

### Литература

1. Плешко М.С., Плешко М.В. Инновационные подходы к проектированию конструкций крепи глубоких вертикальных стволов // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2012. № 7. С. 223-227.

2. Плешко М.С., Курнаков В.А. Перспективы дальнейшего развития техники и технологии строительства вертикальных стволов в России с учетом современных мировых тенденций // Записки горного института. 2012. Т. 199. С. 101-105.

3. Страданченко С.Г., Плешко М.С., Армейсков В.Н. О необходимости проведения комплексного мониторинга подземных объектов на различных стадиях жизненного цикла // Инженерный вестник Дона. 2013. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994.

4. D. Shuxue, J. Hongwen, C. Kunfu, X. Guo'an, M. Bo. Stress evolution and support mechanism of a bolt anchored in a rock mass with a weak interlayer.



International Journal of Mining Science and Technology. № 27 (2017). Pp 573-580.

5. Pleshko M.S., Stradanchenko S.G., Maslennikov S.A., Pashkova O.V. Study of technical solutions to strengthen the lining of the barrel in the zone of influence of construction near-wellbore production. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. VOL. 10. NO. 1, JANUARY 2015. Pp. 14-19.

6. Плешко М.С., Насонов А.А., Гармонин Р.Э., Сироткин А.Ю. Элементы геотехнического мониторинга подземных сооружений, закрепленных железобетонными анкерами // Инженерный вестник Дона. 2015. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3196.

7. Панкратенко А.Н., Нгуен З.Ф., Саммаль А.С., Нгуен С.М. Исследование расчета многослойной крепи тоннелей, сооружаемых в технологически неоднородном массиве пород // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2016. № S13. С. 3-12.

8. Кравченко Г.И. Облегченные крепи вертикальных выработок. М.: Недра, 1974. 208 с.

9. Степанян М.Н. Расчет анкерной крепи замкового типа // Механика подземных сооружений / Сб. научн. тр. Тула: ТулПИ, 1989. С. 16 - 20.

10. Завьялов Р.Ю. Теория и методы расчета анкерной крепи протяженных выработок. Тула, изд. ТулГУ, 2000. 162 с.

### References

1. Pleshko M.S., Pleshko M.V. Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten'. 2012. № 7. Pp. 223-227.

2. Pleshko M.S., Kurnakov V.A. Zapiski gornogo instituta. 2012. T. 199. Pp. 101-105.

3. Stradanchenko S.G., Pleshko M.S., Armejskov V.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. № 4. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1994>.
4. D. Shuxue, J. Hongwen, C. Kunfu, X. Guo'an, M. Bo. Stress evolution and support mechanism of a bolt anchored in a rock mass with a weak interlayer. International Journal of Mining Science and Technology. № 27 (2017). Pp. 573-580.
5. Pleshko M.S., Stradanchenko S.G., Maslennikov S.A., Pashkova O.V. Study of technical solutions to strengthen the lining of the barrel in the zone of influence of construction near-wellbore production. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. VOL. 10. № 1, JANUARY 2015. Pp. 14-19.
6. Pleshko M.S., Nasonov A.A., Garmonin R.Je., Sirotkin A.Ju. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2015. №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3196](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3196).
7. Pankratenko A.N., Nguen Z.F., Sammal' A.S., Nguen S.M. Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten' (nauchno-tehnicheskij zhurnal). 2016. NO. S13. Pp. 3-12.
8. Kravchenko G.I. Oblegchennye krepj vertikal'nyh vyrabotok. [Lightweight supports of vertical workings]. M.: Nedra, 1974. 208 p.
9. Stepanjan M.N. Mehanika podzemnyh sooruzhenij. [Mechanics of underground structures]. Sb. nauchn. tr. Tula: TulPI, 1989. Pp. 16 - 20.
10. Zav'jalov R.Ju. Teorija i metody rascheta ankernoj krepj protjazhennyh vyrabotok. [Theory and methods for calculating the anchor support of long workings]. Tula, izd. TulGU, 2000. 162 p.