Параметрический синтез систем автоматического управления с неоднозначными нелинейными характеристиками

Н.Л. Гречкин

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: В работе предлагается модифицированный метод параметрического синтеза нелинейных систем автоматического управления с неоднозначными нелинейностями на основе обобщённого метода Галеркина. Для исключения необходимости определения точек переключения переходный процесс аппроксимируется двумя участками: полиномом до времени $t_{n.n.}$ и постоянным значением после него. Это позволяет получить рекуррентные формулы для интегралов B_{qi}, упростить расчёты и сохранить абсолютную устойчивость системы.

Ключевые слова: параметрический синтез, нелинейные системы автоматического управления, обобщенный метод Галёркина, неоднозначные нелинейности, гистерезис, точки переключения, полиномиальная аппроксимация, импульсные системы автоматического управления, рекуррентные соотношения, кусочно-линейная аппроксимация.

Задача параметрического синтеза нелинейных непрерывных и импульсных систем, которые включают нелинейные звенья произвольного вида, рассматривается в следующей постановке. Предполагается, что известна как структура нелинейной системы управления, которую требуется синтезировать, так и параметры объекта управления. Параметры регулятора (оператора управления), который имеет структуру в самом общем виде, определяют таким образом, чтобы достичь приближенного выполнения заданных показателей качества работы системы управления в переходном режиме [1,2]. При этом необходимо обеспечить абсолютную устойчивость и грубость системы по варьируемым параметрам. Общая схема решения задачи синтеза параметров непрерывных нелинейных систем управления с использованием обобщенного метода Галеркина подробно представлена в [3].

При использовании разрывных кусочно-линейных функций для аппроксимации нелинейных элементов системах появляется необходимость расчета точек переключения нелинейности [4,5]. Эти точки характеризуются резкими изменениями наклона функции, что требует точного определения для правильного моделирования и анализа поведения системы [6]. Неправильное определение таких точек может привести к ошибкам в расчётах интегралов, снижению точности модели и неправильной оценке переходных режимов.

Как отмечалось в [7,8], при достаточной степени полинома можно добиться высокой точности приближения гладких функций, однако при аппроксимации неоднозначных нелинейных функций, как и в случае с кусочно-линейной аппроксимацией, при использовании обобщенного метода Галеркина может возникнуть необходимость определения точек переключения нелинейности, а значит, для синтеза нелинейных систем автоматического управления (САУ) с неоднозначными нелинейными характеристиками интегралы B_{qi} требуют некоторого пересчета [9,10].

Чтобы исключить определение точек переключения неоднозначных нелинейных характеристик, возможно использовать несколько иной подход для определения интегралов B_{qi} [9,10]. Основная суть данного подхода заключается в полиномиальной аппроксимации двух участков переходного процесса, в случае процесса относительно координаты выхода (рис.1), разными функциями – первый участок аппроксимируется полиномом n-ной степени от времени 0 до времени $t_{n.n.}$, второй участок – прямой от времени $t_{n.n.}$ до времени $+\infty$. В случае аппроксимации процесса относительно координаты ошибки (рис.2) – первый участок аппроксимируется полиномом n-ной степени от времени 0 до времени $t_{n.n.}$, второй участок приравнивается к нулю.

Таким образом, разделяя процесс на выходе нелинейного элемента на два участка в непрерывных системах, можно записать:

$$B_{qi} = \int_0^\infty D^i\left\{F(t)\right\}e^{-\rho_q t}dt = \int_0^{t_1} D^i\left\{F(t)\right\}e^{-\rho_q t}dt + \int_{t_1}^\infty D^i\left\{F(t)\right\}e^{-\rho_q t}dt =$$

$$=\int_0^{t_1} D^i\left\{\sum_{g=0}^{l} a_0 t^g 1(t)\right\} e^{-\rho_q t}dt+\int_{t_1}^{\infty} D^i\left\{H\right\} e^{-\rho_q t}dt.$$

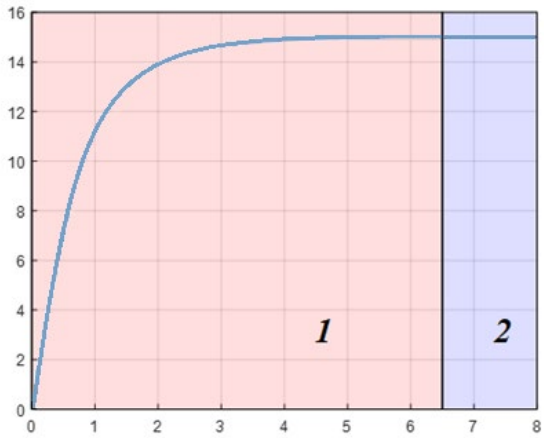

Рис. 1. - Аппроксимируемые участки процесса относительно координаты выхода

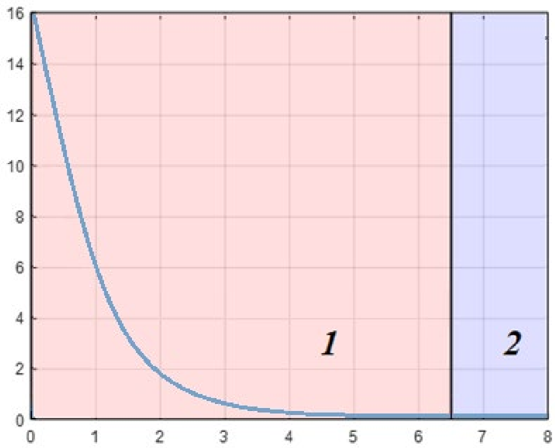

Рис. 2. - Аппроксимируемые участки процесса относительно координаты ошибки

В табл.1 приведены рассчитанные интегралы первого слагаемого $-\int_0^{t_1} D^i\left\{\sum_{g=0}^{l} a_0 t^g 1(t)\right\} e^{-\rho_q t}dt$ – для различных показателей степени g.

Таблица №1

Рассчитанные интегралы

Показатель	Интеграл

степени g	
0	$\frac{a_0}{\rho_q}\left(1-e^{-\rho_q t_1}\right)$
1	$\frac{a_1}{\rho_q^2}\left(1-e^{-\rho_q t_1}-t_1\rho_q e^{-\rho_q t_1}\right)$
2	$2\frac{a_2}{\rho_q^3}\left(1-e^{-\rho_q t_1}-t_1\rho_q e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^2\rho_q^2}{2}e^{-\rho_q t_1}\right)$
3	$6\frac{a_3}{\rho_q^4}\left(1-e^{-\rho_q t_1}-t_1\rho_q e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^2\rho_q^2}{2}e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^3\rho_q^3}{6}e^{-\rho_q t_1}\right)$
4	$24\frac{a_4}{\rho_q^5}\left(1-e^{-\rho_q t_1}-t_1\rho_q e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^2\rho_q^2}{2}e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^3\rho_q^3}{6}e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^4\rho_q^4}{24}e^{-\rho_q t_1}\right)$
5	$120\frac{a_4}{\rho_q^5}\left(1-e^{-\rho_q t_1}-t_1\rho_q e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^2\rho_q^2}{2}e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^3\rho_q^3}{6}e^{-\rho_q t_1}\right.$ $\left.-\frac{t_1^4\rho_q^4}{24}e^{-\rho_q t_1}-\frac{t_1^5\rho_q^5}{120}e^{-\rho_q t_1}\right)$

Рассмотрим вычисление второго слагаемого интеграла B_{qi}:

$$\int_{t_1}^{\infty} D^i\{H\}e^{-\rho_q t}dt.$$

При $i > 0$ производная от константы равна нулю, поэтому следует рассмотреть два случая: $i = 0$ и $i > 0$.

При $i = 0$ имеем:

$$H\int_{t_1}^{\infty} e^{-\rho_q t}dt = \frac{H}{-\rho_q}e^{-\rho_q t}\Big|_{t_1}^{\infty} = \frac{H}{-\rho_q}\left(0-e^{-\rho_q t_1}\right) = \frac{H}{\rho_q}e^{-\rho_q t_1}.$$

При $i > 0$ имеем:

$$\int_{t_1}^{\infty} 0\cdot dt = 0.$$

Тогда получаем следующее рекуррентное соотношение для аппроксимируемого процесса относительно координаты ошибки $x^0(t)=\left(H^* e^{-\alpha t}\cos\left(\beta t-\varphi_0\right)\right)1(t)$:

$$B_{qi}=\sum_{g=0}^{l} a_g \frac{g!}{\rho_q^{g+1}}\left(1-e^{-\rho_q t_1}\sum_{k=0}^{g}\frac{\left(t_1\rho_q\right)^k}{k!}\right)\cdot \rho_q{}^i .$$

Аналогично для аппроксимируемого процесса относительно координаты выхода, описываемого выражением $x^0(t)=\left(x_y-H^* e^{-\alpha t}\cos\left(\beta t-\varphi_0\right)\right)1(t)$, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$B_{qi}=\left[\sum_{g=0}^{l} a_g \frac{g!}{\rho_q^{g+1}}\left(1-e^{-\rho_q t_1}\sum_{k=0}^{g}\frac{\left(t_1\rho_q\right)^k}{k!}\right)+\delta_{i0}\frac{H}{\rho_q}e^{-\rho_q t_1}\right]\cdot \rho_q{}^i ,$$

где $\delta_{i0}=\begin{cases}1, & i=0,\\ 0, & i\neq 0.\end{cases}$ – функция Кронекера.

Предложенный модифицированный подход на основе обобщённого метода Галеркина позволяет исключить необходимость определения точек переключения при синтезе непрерывных нелинейных САУ с неоднозначными нелинейными характеристиками. Разделение переходного процесса на два участка позволяет аналитически вычислить необходимые интегралы B_{qi} в явном виде. Полученные рекуррентные соотношения значительно упрощают расчёты параметров регулятора по сравнению с традиционными методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-20230003, "Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем 1

космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга".

Литература

1. Jingjing Gao, Xiangpeng Xie, A weighted switching sequence optimization algorithm for static output feedback control synthesis of nonlinear systems, Applied Mathematics and Computation, Volume 489, 2025, 129152, ISSN 0096-3003, doi.org/10.1016/j.amc.2024.129152

2. Wen-Chao HUANG, Hong-Fei SUN, Jian-Ping ZENG, Robust Control Synthesis of Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares Technique, Acta Automatica Sinica,Volume 39, Issue 6, 2013, Pages 799-805, ISSN 1874-1029, doi.org/10.1016/S1874-1029(13)60055-5

3. Никитин А.В., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография. – СПб: СПбГУАП., 2003. – 358 с.

4. Talha Mushtaq, Peter Seiler, Maziar S. Hemati, On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities, Automatica, Volume 159, 2024, 111380, ISSN 0005-1098, doi.org/10.1016/j.automa ica.2023.111380.

5. Целигоров Н.А., Целигорова Е.Н., Мафура Г.Ф. Математические модели неопределенностей систем и методы, используемые для их исследования // Инженерный вестник Дона. 2012. №4. (ч.2). URL: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340.

6. Amadou Cissé, Mohamed Boutayeb, On state feedback control of a class of NonLinear PDE systems in finite dimension, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 130, 2024, 107751, ISSN 1007-5704, doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107751

7. Стрекаловский, А. С. О решении систем квадратичных уравнений / А. С. Стрекаловский, М. В. Баркова // Труды института математики и механики

УрО РАН. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 173-187. – DOI 10.21538/0134-4889-2024-30-2-173-187.

8. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных уравнений нелинейными Лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251

9. Ватаева, Е. Ю. Параметрический синтез маломощной потенциометрической следящей системы / Е. Ю. Ватаева // Труды МАИ. – 2024. – № 134.

10. Гречкин, Н.Л. О методике выбора коэффициента затухания программного движения при решении задачи синтеза нелинейных / Н.Л. Гречкин // Датчики и системы. – 2025. №4 (282). – С. 3-10.

References

1. Jingjing Gao, Xiangpeng Xie, A weighted switching sequence optimization algorithm for static output feedback control synthesis of nonlinear systems, Applied Mathematics and Computation, Volume 489, 2025, 129152, ISSN 0096-3003, doi.org/10.1016/j.amc.2024.129152

2. Wen-Chao HUANG, Hong-Fei SUN, Jian-Ping ZENG, Robust Control Synthesis of Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares Technique, Acta Automatica Sinica,Volume 39, Issue 6, 2013, Pages 799-805, ISSN 1874-1029, doi.org/10.1016/S1874-1029(13)60055-5

3. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. Parametricheskiy sintez nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya: monografiya [Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems: monograph]. SPb: SPbGUAP., 2003. 358 p.

4. Talha Mushtaq, Peter Seiler, Maziar S. Hemati, On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities, Automatica, Volume 159, 2024, 111380, ISSN 0005-1098, doi.org/10.1016/j.automa ica.2023.111380

5. Tseligorov N.A., Tseligorova E.N., Mafura G.F. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4. (ch.2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340.

6. Amadou Cissé, Mohamed Boutayeb, On state feedback control of a class of NonLinear PDE systems in finite dimension, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 130, 2024, 107751, ISSN 1007-5704, doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107751.

7. Strekalovskiy A. S., Barkova M.V. Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. 2024. T. 30, № 2. pp. 173-187. DOI 10.21538/0134-4889-2024-30-2-173-187.

8. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Lazarenko S.V., Tsennykh B.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251

9. Vataeva E. Yu. Trudy MAI. 2024. № 134. URL: trudymai.ru/published.php?ID=178477

10. Grechkin N.L. Datchiki i sistemy. 2025. №4 (282). pp. 3-10

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 17.11.2025
Дата публикации: 26.12.2025