

Свободно лежащая балка на упругом одностороннем основании Винклера, нагруженная силами по концам

А.Д. Ловцов^{1,2},

¹ Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

² Научно конструкторское бюро «Метод», Хабаровск

Аннотация: В статье получено аналитическое решение для частного случая конструктивно - нелинейной задачи: балки, свободно лежащей на одностороннем основании Винклера, нагруженной одинаковыми вертикальными силами F по концам. Изгибная жесткость балки EI , длина – l , коэффициент постели основания – k , коэффициент приведенной длины – $\alpha = \sqrt[4]{k/(4EI)}$. Показано, что: отрыв балки от основания возникает при величине приведенной длины балки $\alpha l > \pi$; размер зоны отрыва не зависит от величины приложенной силы. Увеличение жесткости основания (при неизменной длине балки) приводит к увеличению размеров зоны отрыва. Изгибающий момент в середине балки с отрывом максимален в «момент отрыва» и равен $0.4F/\alpha$. Прогиб в середине балки также зависит от жесткости основания и пропорционален приложенной силе. При увеличении жесткости основания момент и прогиб уменьшаются и становятся равным нулю для бесконечно жесткого основания. Приведен алгоритм расчета указанной балки и пример, показывающий изменение параметров напряженно деформированного состояния балки при увеличении жесткости основания. Полученные результаты, на взгляд автора, интересны сами по себе и, кроме того, могут пополнить набор верификационных конструктивно нелинейных задач

Ключевые слова: конструктивная нелинейность, одностороннее основание Винклера, балка, зона контакта, зона отрыва, функции Крылова.

В расчетной практике все чаще возникают ситуации, когда уточнение расчетной схемы приводит к необходимости рассматривать конструктивно нелинейные системы, известные также как системы с односторонними связями. Например, в [1] приведены различные типы балок, расчетные схемы которых включают односторонние связи. Продолжают развиваться методы решения таких задач [2]. Одной из популярных моделей является модель взаимодействия стержня с грунтом, работающим только на сжатие [3, 4]. В [5] описывается технология безподъемной укладки протяженного трубопровода в траншею, приводящая, среди прочего, к задаче определения зоны отрыва трубопровода от грунта. В [6] проведено сравнение численного и аналитического решений, когда корректность полученных в ANSYS

результатов подтверждается результатами решения дифференциального уравнения изогнутой оси балки на упругом винклеровском основании. В [4] предложен полуаналитический подход, основанный на методе Ритца, который может «использоваться в качестве ориентира для более общих и сложных задач». Получение аналитических решений даже простых задач актуально, в том числе, и как средство тестирования алгоритмов расчета сложных задач [7 – 9]. Это позволит пополнить набор верификационных задач для тестирования программных комплексов по разделу конструктивной нелинейности [10].

В настоящей статье предлагается **аналитическое решение** для свободно лежащей балки изгибной жесткостью EI , взаимодействующей с упругим односторонним (работающим только на сжатие) основанием Винклера (коэффициент постели k), загруженной по торцам одинаковыми по величине силами F . Коэффициент приведенной длины $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$.

Рассмотрим ситуацию, когда в середине балки появляется зона отрыва длиной l_o . Оставшаяся часть балки длиной l_c представляет собой зону контакта балки с основанием. Расчетная схема, учитывающая симметрию задачи, показана на рис. 1. Размеры зон контакта и отрыва заранее неизвестны. Следует определить: прогибы ν , углы поворота поперечных сечений φ , изгибающие моменты M и поперечные силы Q .

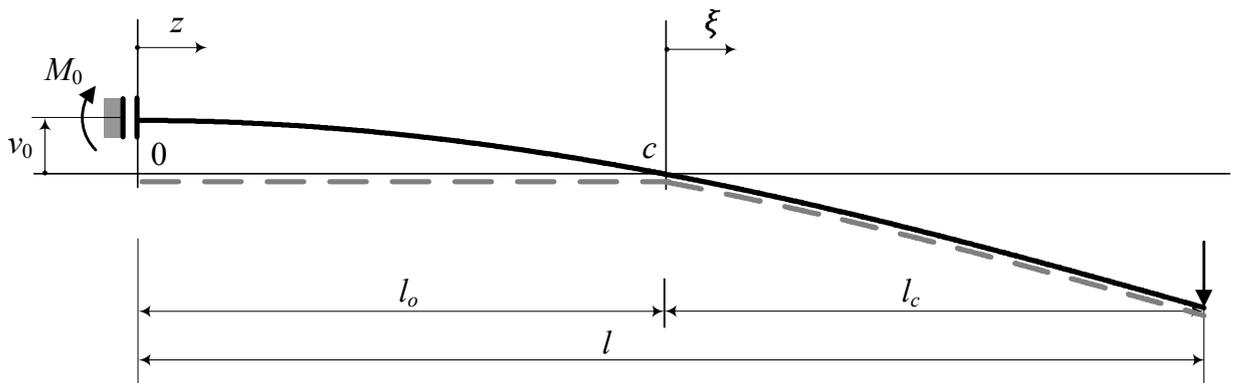


Рис. 1. Расчетная схема балки на одностороннем основании Винклера

Рассмотрим зону отрыва, разместив начало координат в точке 0.

Тогда в начале координат: $v_0 \neq 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 \neq 0$; $Q_0 = 0$. В зоне отрыва:

$$\begin{aligned} v(z) &= v_0 + \frac{M_0 z^2}{EI} \cdot \frac{1}{2}; & \varphi(z) &= \frac{M_0}{EI} z; \\ M(z) &= M_0; & Q(z) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В конце зоны отрыва (в точке c):

$$v_c = v_0 + \frac{M_0 l_0^2}{EI} \cdot \frac{1}{2} = 0; \quad \varphi_c = \frac{M_0}{EI} l_0; \quad M_c = M_0; \quad Q_c = 0. \quad (2)$$

Перенесем начало координат в точку c и выпишем выражения для параметров НДС балки на упругом основании:

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \frac{Y_2(\xi)}{\alpha} \varphi_c + \frac{Y_3(\xi) M_c}{\alpha^2 EI}; & \varphi(\xi) &= Y_1(\xi) \varphi_c + \frac{Y_2(\xi) M_c}{\alpha EI}; \\ M(\xi) &= -4\alpha Y_4(\xi) EI \varphi_c + Y_1(\xi) M_c; & Q(\xi) &= -4\alpha^2 Y_3(\xi) EI \varphi_c - 4\alpha Y_4(\xi) M_c, \end{aligned} \quad (3)$$

где: $Y_1(\xi) = \cos \xi \cdot \operatorname{ch} \xi$, $Y_2(\xi) = \frac{1}{2} (\sin \xi \cdot \operatorname{ch} \xi + \cos \xi \cdot \operatorname{sh} \xi)$,
 $Y_3(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \sin \xi \cdot \operatorname{sh} \xi$, $Y_4(\xi) = \frac{1}{4} (\sin \xi \cdot \operatorname{ch} \xi - \cos \xi \cdot \operatorname{sh} \xi)$ – функции Крылова; $\xi = \alpha z$.

Граничные условия на правом конце балки при $\xi = \alpha l_c = \bar{l}_c$:

$$M(\bar{l}_c) = 0; \quad Q(\bar{l}_c) = F.$$

С учетом (3) и (2) первое из них запишется в виде:

$$M(\bar{l}_c) = -4\alpha Y_4(\bar{l}_c) EI \frac{M_0}{EI} l_0 + Y_1(\bar{l}_c) M_0 = M_0 \cdot [-4\alpha l_0 Y_4(\bar{l}_c) + Y_1(\bar{l}_c)] = 0$$

Полагая $M_0 \neq 0$ и $\alpha l_o = \bar{l}_o$, имеем зависимость между приведенными длинами зон отрыва и контакта в виде:

$$\bar{l}_o(\bar{l}_c) = \frac{Y_1(\bar{l}_c)}{4Y_4(\bar{l}_c)} = \frac{\cos \bar{l}_c \cdot \text{ch} \bar{l}_c}{\sin \bar{l}_c \cdot \text{ch} \bar{l}_c - \cos \bar{l}_c \cdot \text{sh} \bar{l}_c}. \quad (4)$$

График этой зависимости приведен на рис. 2, а. Практический интерес представляет часть графика на интервале $0 < \bar{l}_c \leq \pi/2$ где размеры зоны отрыва положительны (рис. 2, б).

В дальнейшем изложении приведенные длины \bar{l} , \bar{l}_o , \bar{l}_c , будем называть просто длиной балки, длинами зон отрыва и контакта, опуская слово «приведенная».

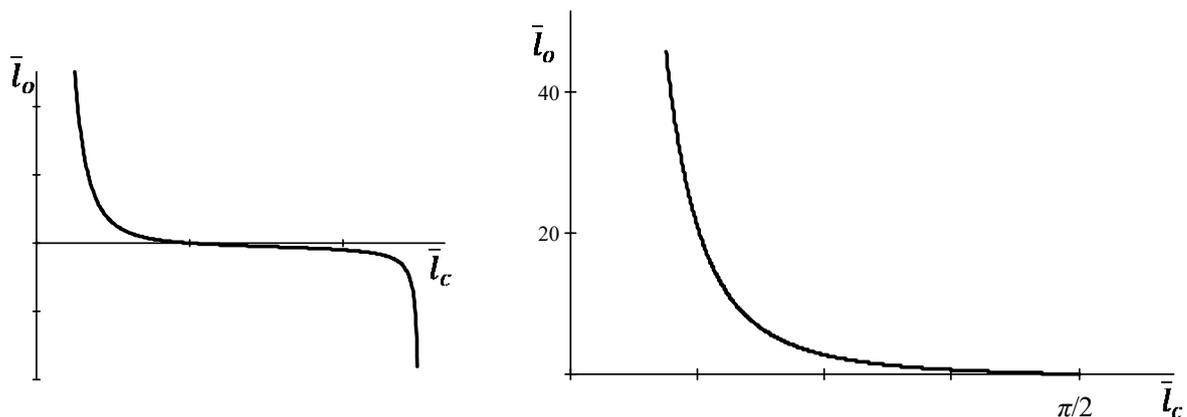


Рис. 2. Зависимость размера зоны отрыва от размеров зоны контакта:
а) общий вид; б) рабочая часть графика

При $\bar{l}_c \rightarrow 0$ размер зоны отрыва устремляется в бесконечность (рис. 2, б). То есть, для бесконечно длинной балки размер зоны контакта стремится к нулю. Дальнейшее увеличение зоны контакта сопровождается уменьшением зоны отрыва при общей длине балки $\bar{l} = \bar{l}_c + \bar{l}_o(\bar{l}_c) > \bar{l}_c$. Следовательно, рассматриваемая часть графика описывает поведение балки с отрывом.

При $\bar{l}_c = \pi/2$ зона отрыва исчезает и балка по всей своей длине контактирует с основанием: $\bar{l} = \bar{l}_c$.

Таким образом при длине балки $\bar{l}_c < \pi/2$ балка всюду контактирует с основанием, а при $\bar{l}_c = \pi/2$ наступает «момент отрыва» балки от основания – линейная часть графика в осях $\bar{l} = \bar{l}_c + \bar{l}_o(\bar{l}_c)$, \bar{l}_c (рис. 3).

Дальнейшее увеличение длины балки $\bar{l} > \pi/2$ приводит к появлению отрыва и уменьшению зоны контакта, размер которой асимптотически приближается к нулю при длине балки \bar{l} , устремляющейся в бесконечность – нелинейная часть графика на рис. 3.

Итак, по поводу зоны контакта для балки с отрывом можно сделать следующие выводы: размер зоны контакта не зависит от величины приложенной силы, а зависит от соотношения жесткостей балки и основания; увеличение жесткости основания приводит к увеличению приведенной длины балки, что, в свою очередь, приводит к уменьшению размеров зоны контакта. Коротко говоря, чем жестче основание, тем меньше зона контакта.

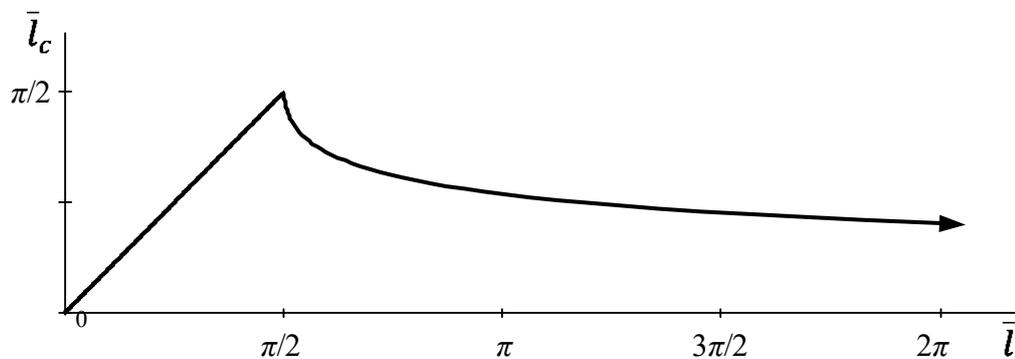


Рис. 3. Зависимость размера зоны контакта от длины балки

Обратимся ко второму граничному условию $Q(\bar{l}_c) = F$ на правом конце зоны контакта. С учетом (3), (2) имеем:

$$Q(l_c) = -4\alpha^2 Y_3(\bar{l}_c) EI \varphi_c - 4\alpha Y_4(\bar{l}_c) M_c = -4\alpha M_0 [\alpha l_o Y_3(\bar{l}_c) + Y_4(\bar{l}_c)] = F.$$

Откуда получаем **изгибающий момент** в плавающей заделке:

$$M_0(\alpha, \bar{l}_c) = \frac{F}{\alpha} \cdot \bar{M}_0(\bar{l}_c), \quad (5)$$

где:

$$\bar{M}_0(\bar{l}_c) = -\frac{1}{4(\bar{l}_o(\bar{l}_c) \cdot Y_3(\bar{l}_c) + Y_4(\bar{l}_c))}. \quad (6)$$

График функции $\bar{M}_0(\bar{l}_c)$ представлен на рис. 4, а. Анализ этого графика позволяет утверждать, что при ужесточении основания момент (по модулю) в плавающей заделке уменьшается, поскольку уменьшается зона контакта. Коротко говоря, увеличение приведенной длины балки приводит к уменьшению момента.

Перемещение плавающей заделки получим из первого выражения в (2):

$$v_0(\alpha, \bar{l}_c) = -\frac{M_0(\alpha, \bar{l}_c) l_o^2}{EI} \frac{1}{2}.$$

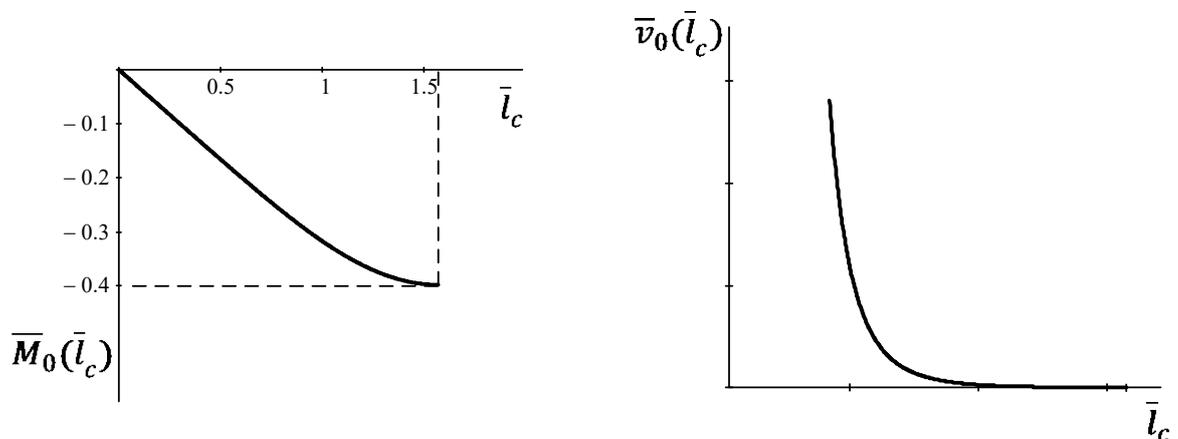


Рис. 4. Изменение: а) – момента; б) – прогиба в плавающей заделке при изменении размеров зоны контакта

С учетом (5), (6) и того, что $l_o = \bar{l}_o/\alpha$, имеем $v_0(\alpha, \bar{l}_c) = -\frac{F}{\alpha EI} \cdot \bar{M}_0(\bar{l}_c) \cdot \frac{\bar{l}_o^2(\bar{l}_c)}{2\alpha^2}$.

Выпишем прогиб балки на оси симметрии в виде:

$$v_0(\alpha, \bar{l}_c) = \frac{F}{\alpha^3 EI} \cdot \bar{v}_0(\bar{l}_c), \quad (7)$$

где

$$\bar{v}_0(\bar{l}_c) = -\bar{M}_0(\bar{l}_c) \cdot \frac{\bar{l}_0^2(\bar{l}_c)}{2}. \quad (8)$$

График функции $\bar{v}_0(\bar{l}_c)$ приведен на рис. 4, б.

Можно показать, что при $\bar{l}_c \rightarrow 0$ прогиб $v_0 \rightarrow 0$, поскольку $\lim_{\bar{l}_c \rightarrow 0} \bar{M}_0(\bar{l}_c) = 0$,

$$\lim_{\bar{l}_c \rightarrow 0} \frac{\bar{l}_0^2(\bar{l}_c)}{\alpha^2} = \lim_{\bar{l}_c \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 l_0^2(\bar{l}_c)}{\alpha^2} = \infty.$$

Отметим, что для балки с отрывом перемещение плавающей заделки зависит от длины зоны контакта, коэффициента приведенной длины α и пропорционально приложенной силе F .

Алгоритм расчета балки на одностороннем основании Винклера.

1. Определяется коэффициент приведенной длины $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$.
2. Определяется приведенная длина балки $\bar{l} = \alpha l$.
3. Если $\bar{l} \leq \pi/2$, то производится обычный расчет балки на упругом винклеровском основании:

$$\Delta = 4Y_3(\bar{l}) \cdot Y_4(\bar{l}) + Y_1(\bar{l}) \cdot Y_2(\bar{l});$$

$$v(\xi) = \frac{F}{4\alpha^3 EI \Delta} (Y_1(\bar{l}) \cdot Y_1(\xi) + 4Y_3(\bar{l}) \cdot Y_3(\xi));$$

$$\varphi(\xi) = \frac{F}{\alpha^2 EI \Delta} (-Y_3(\bar{l}) \cdot Y_2(\xi) + Y_1(\bar{l}) \cdot Y_4(\xi));$$

$$M(\xi) = \frac{F}{\alpha \Delta} (-Y_3(\bar{l}) \cdot Y_1(\xi) + Y_1(\bar{l}) \cdot Y_3(\xi));$$

$$Q(\xi) = \frac{F}{\Delta} (Y_1(\bar{l}) \cdot Y_2(\xi) + 4Y_3(\bar{l}) \cdot Y_4(\xi));$$

$$\xi = \alpha z, \quad (0 \leq z \leq l).$$

4. Если $\bar{l} > \pi/2$, то:

4.1. из решения нелинейного уравнения $\bar{l}_c + \bar{l}_0(\bar{l}_c) = \bar{l}$ определяется приведенная длина зоны контакта; начальное приближение следует задавать

в пределах $0 < \bar{l}_c < \pi/2$ (рекомендуется принять начальное приближение $\bar{l}_c \approx \pi/100$);

- 4.2. по формуле (4) определяется приведенная длина зоны отрыва \bar{l}_o ;
- 4.3. по формулам (5), (6) определяется M_0 ;
- 4.4. по формулам (7), (8) определяется v_0 ;
- 4.5. по формулам (1) на интервале $0 \leq z \leq l_o = \bar{l}_o/\alpha$ определяются $v(z)$, $\varphi(z)$, $M(z)$, $Q(z)$;
- 4.6. по формулам (2) определяем φ_c , M_c ;
- 4.7. по формулам (3) на интервале $0 \leq \xi \leq \bar{l}_c$ определяем $v(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $M(\xi)$, $Q(\xi)$.

Пример. Рассматривается балка с поперечным сечением 0.2×0.2 м, модулем упругости $E = 1 \cdot 10^{10}$ Па, полудлиной $l = 3.2$ м, загруженная силами $F = 50$ кН (рис. 1). Ниже на рис. 5 приведены результаты расчета при изменении жесткости основания.

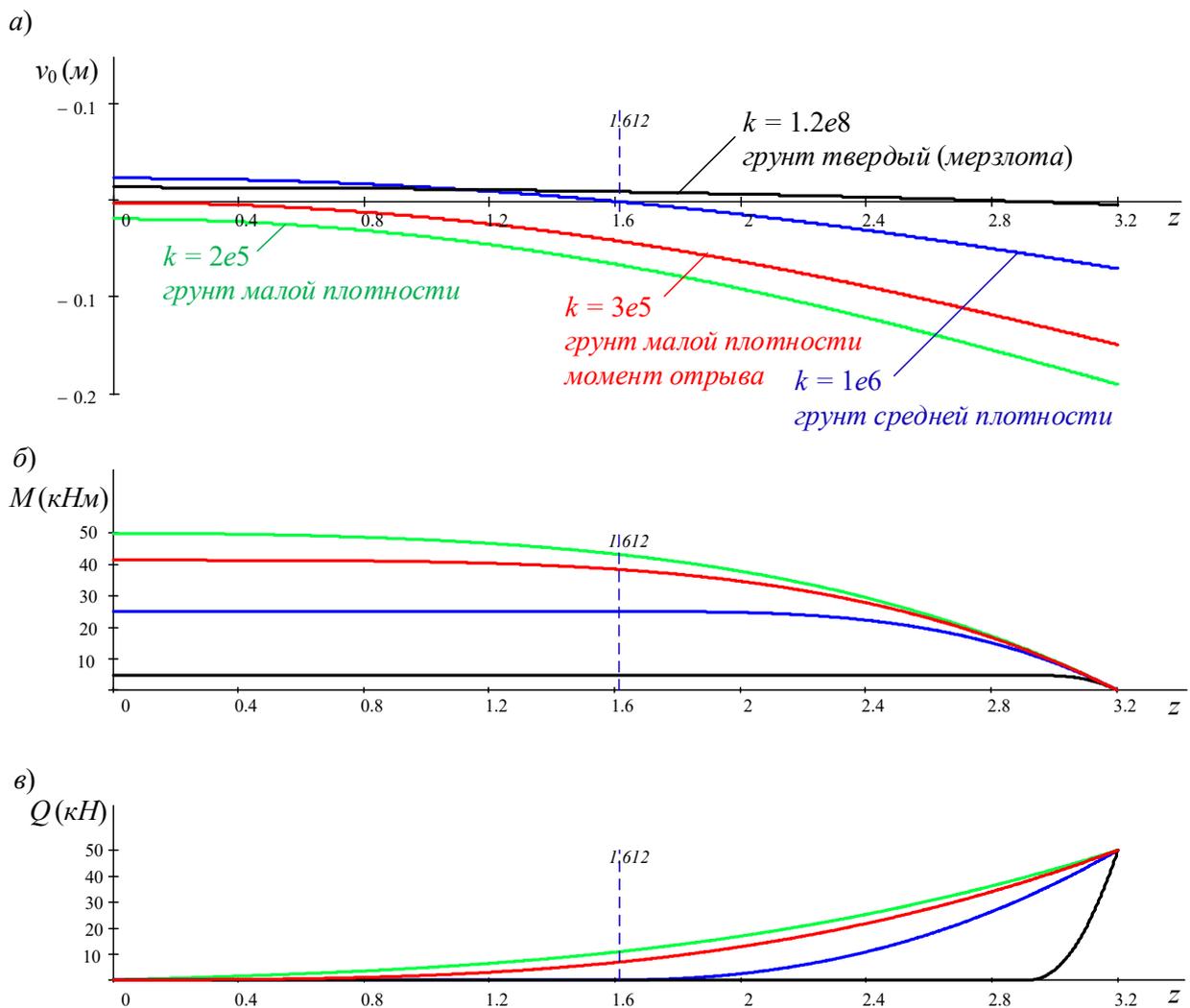


Рис. 5. Изменение: а) – прогибов; б) – моментов; в) – поперечных сил при увеличении коэффициента постели основания

Увеличение жесткости основания приводит к уменьшению величин прогибов (рис. 5, а), изгибающих моментов (рис. 5, б) и поперечных сил (рис. 5, в). При взаимодействии балки с грунтом малой плотности балка по всей своей длине контактирует с основанием. Увеличение жесткости основания (грунт средней плотности) приводит к появлению зоны отрыва, уменьшению величин прогибов, моментов и поперечных сил. Дальнейшее увеличение жесткости (твердый грунт, мерзлота) приводит к резкому

уменьшению размеров зоны контакта и величин параметров напряженного состояния на большей части балки.

На рис. 5 вертикальным пунктиром показана точка отрыва для балки, взаимодействующей с грунтом средней плотности (коэффициент постели $k = 1 \cdot 10^6$ Н/м²). В зоне отрыва, при этом, поперечная сила равна нулю, а момент не меняется и равен M_0 .

Выводы. Если приведенная полудлина балки $\alpha l \leq \pi/2$, то балка по всей своей длине контактирует с односторонним (работающим только на сжатие) основанием. При $\alpha l > \pi/2$ появляется зона отрыва, размер которой не зависит от величины приложенной силы, а зависит от соотношения жесткостей балки и основания. Увеличение жесткости основания приводит к увеличению размеров зоны отрыва – чем жестче основание, тем больше зона отрыва.

Изгибающий момент на оси симметрии балки пропорционален приложенной силе F и обратно пропорционален жесткости основания. В момент отрыва изгибающий момент (по модулю) максимален и равен $M_0(\pi/2) \approx -0.4 \frac{F}{\alpha}$. При увеличении зоны отрыва момент уменьшается и для бесконечно длинной балки стремится к нулю.

Для балки с отрывом прогиб на оси симметрии балки v_0 зависит от длины зоны отрыва, коэффициента приведенной длины α и пропорционален приложенной силе F . При бесконечно жестком основании $v_0 = 0$.

Полученные результаты, на взгляд автора, интересны сами по себе и, кроме того, могут пополнить набор верификационных конструктивно нелинейных задач.

Литература

1. Юсупов А.К., Муселемов Х.М., Вишталов Р.И. Расчетные модели балок с односторонними связями. Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024. Том 4. №51. С. 236-248. URL: doi.org/10.21822/2073-6185-2024-51-4-236-248.
2. Бочков М.И. Анализ эффективности решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Автореферат диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. 2022. 23 с.
3. Bhattiprolu U., Bajaj Anil K., Davies P. An efficient solution methodology to study the response of a beam on viscoelastic and nonlinear unilateral foundation: Static response. International Journal of Solids and Structures. 2013. №50. pp. 2328–2339.
4. Ricardo A.M. Silveira, Wellington L.A. Pereira, Paulo B. Goncalves Nonlinear analysis of structural elements under unilateral contact constraints by a Ritz type approach. International Journal of Solids and Structures. 2008. №45. pp. 2629–2650.
5. Простаков Е.П. Теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния магистрального трубопровода при использовании способа безподъемной технологии его укладки // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1309.
6. Макаров Ю.А., Зевайкин А.Е. Оценка деформаций балок на упругом винклеровском основании с помощью программного комплекса ANSYS WORKBENCH. // Инженерный вестник Дона. 2022. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2022/7853.

7. Дойхен Ю.М., Ким Т.С., Ловцов А.Д. Тен Ен Со. Расчет конструкций, контактирующих с упругим основанием. Хабаровск. Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та. 2001. 203 с.

8. Ловцов А.Д. Балка на одностороннем основании Винклера, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Сборник научных трудов «Строительная механика и механика материалов». Выпуск 2. Хаб. гос. техн. ун-т. Хабаровск 2002. С. 27-48. (Рукопись деп. 30.09.2002 в ВИНТИ, № 1650-B2002).

9. Филипов А.М. Аналитическое численное решение плоской контактной задачи с учетом ползучести материала // Инженерный вестник Дона. 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3510.

10. Верификационный отчет по программному комплексу MicroFE
URL: tech-soft.ru/doc/otchet_16.pdf.

References

1. Jusupov A. K., Muselemov H., Vishtalov, R.I. Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Tehničeskie nauki. 2024. Tom 51. № 4. pp. 236-248. DOI: 10.21822/2073-6185-2024-51-4-236- 248.

2. Bochkov M.I. Analiz jeffektivnosti reshenija zadach statiki sistem s odnostoronnimi svjazjami na osnove MKJe v forme klassičeskogo smeshannogo metoda [Efficiency Analysis of Static Problems for Systems with Unilateral Constraints Using Mixed FEM]. Avtoreferat dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata tehničeskikh nauk. 2022. 23 p.

3. Bhattiprolu U., Bajaj Anil K., Davies P. International Journal of Solids and Structures. 2013. №50. pp. 2328–2339.

4. Ricardo A.M. Silveira, Wellington L.A. Pereira, Paulo B. Goncalves International Journal of Solids and Structures. 2008. № 45. pp. 2629–2650.

5. Prostakov E.P. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4 (chast' 2). URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1309.



6. Makarov Ju.A., Zevajkin A.E. Inzhenernyj vestnik Dona. 2022. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2022/7853.

7. Lovcov A.D. Sbornik nauchnyh trudov «Stroitel'naja mehanika i mehanika materialov». Vypusk 2. Hab. gos. tehn. un-t. Habarovsk. 2002. pp. 27-48. (Rukopis' dep. 30.09.2002 v VINITI, № 1650-V2002).

8. Dojhen Ju.M., Kim T.S., Lovcov A.D. Ten En So. Raschet konstrukcij, kontaktirujushhih s uprugim osnovaniem [Analysis of Structures Interacting with Elastic Foundations]. Habarovsk.: Izd-vo Habar. gos. tehn. un-ta. 2001. 203 p.

9. Filipov A.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2016/3510.

10. Verifikacionnyj otchet po programmnomu kompleksu MicroFE [Verification Report for MicroFE Software Suite]. URL: tech-soft.ru/doc/otchet_16.pdf.

Дата поступления: 11.07.2025

Дата публикации: 1.10-.2025