

## Дифракция плоской волны на сфере из метаматериала

*О. П. Пономарев, А. А. Бахтин, А. Г. Тимошенко, А. С. Волков, М. А. Соколов, У. В. Иваненко*

*Национальный исследовательский университет «МИЭТ»*

**Аннотация:** Продемонстрировано применение строгих решений уравнений Максвелла в сферической системе координат, полученных на основе представления группы вращений, для решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на сфере из метаматериала. Полученные результаты моделирования свидетельствуют о возможности синтеза метаматериала, обеспечивающего минимум поля рассеяния в заданном направлении.

**Ключевые слова:** метаматериалы, СВЧ, антенны, дифракция, уравнения Максвелла, электромагнитные волны, диэлектрическая проницаемость.

Метаматериалы открывают перспективы для разработки сверхвысокочастотных (СВЧ), инфракрасных и оптических приборов различного назначения [1]: поглощающих материалов, резонаторов, нано-лазеров, нано-антенн, частотно-селективных структур, сред с управляемым коэффициентом отражения, нано-сенсоров и др. Использование метаматериалов (ММ) в антенной технике актуально для их миниатюризации, обеспечения высокого коэффициента усиления, коэффициента направленного действия, многочастотного режима работы, повышения частотной избирательности и чувствительности, формирования характеристики направленности с низким уровнем кросс-поляризации [2, 3].

Решение задачи дифракции волн на телах, имеющих отрицательный коэффициент преломления  $\hat{n} = \sqrt{\varepsilon'\mu'}$  ( $\varepsilon'$ ,  $\mu'$  - относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, заполняющей тело), имеет прикладное значение для создания радиопоглощающих материалов (РПМ) в заданном диапазоне частот. По сравнению с клином, для тел с круговым профилем характерны поверхностные, «ползущие» волны, волны «шепчущей галереи», многократные отражения от вогнутой поверхности, использование которых расширяет функциональные возможности ММ. Анализ ММ основан на

строгих методах (метод тензорных функций Грина, интегральных уравнений с процедурами редукции систем линейных алгебраических уравнений), конечно-разностных методах во временной и частотной областях (метод моментов, метод конечных элементов), приближенных методах с допущениями на размерность задачи и граничные (краевые) условия, асимптотических методах. В работе [4] метод функции Грина используется для анализа полусферического резонатора с электрическим размером  $ka < 1$  ( $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число,  $a$  - радиус мнимой сферы, охватывающий антенну), возбуждаемого щелевым источником. Для получения распределения тока вдоль источника возбуждения применяется метод моментов. Метод функции Грина и асимптотическое решение интегрального уравнения методом стационарной фазы предложено в работе [5] при решении задачи нахождения поля рассеяния абсолютно проводящего цилиндра вблизи слоя ММ, покрывающего абсолютно проводящий слой. Структура возбуждается источником внутри слоя ММ с низким коэффициентом преломления. В работе [6] обсуждаются результаты строгого решения задачи рассеяния плоской и цилиндрической волны круглым цилиндром из ММ модифицированным методом дискретных источников. Использование строгих численных решений задач дифракции волн на телах из ММ наряду с высокой точностью расчетов требует проверки устойчивости решения и ограничивает физическую интерпретацию результатов на промежуточных этапах вычислений.

В данной работе продемонстрировано применение строгих решений уравнений Максвелла в сферической системе координат, полученных на основе представления группы вращений, для решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны (ЭМВ) на сфере из метаматериала.

Пусть на сферу из ММ радиуса  $a$ , находящуюся в однородной изотропной среде, падает плоская линейно поляризованная ЭМВ с

---

направлением вектора поляризации, совпадающем с осью  $ox$  (рис.1). Электрический и магнитный векторы как вне, так и внутри сферы удовлетворяют уравнениям Максвелла в форме, не зависящей от времени:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -k_1 \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= k_2 \vec{H} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $k_1 = \frac{i\omega}{C} \left( \varepsilon' \mu' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)$ ;  $k_2 = \frac{i\omega}{C}$ ;  $C$  - скорость света в среде.

Учитывая, что среда, в которой находится сфера, непроводящая ( $\sigma = 0$ ), квадрат обычного волнового числа  $k$  (вещественного вне сферы и комплексного внутри её)  $k^2 = -k_1 k_2$ . Обозначим величины, относящиеся к среде, окружающей сферу, символом I, которые относятся к сфере, символом II. Если амплитуда падающей волны нормирована на единицу, то напряженность электрического и магнитного полей  $\vec{E}_{пад} = e^{-ik^I z} \vec{x}^{\circ}$ ;

$\vec{H}_{пад} = \frac{ik^I}{k_2^I} e^{-ik^I z} \vec{y}^{\circ}$  ( $\vec{x}^{\circ}$ ,  $\vec{y}^{\circ}$  - орты).

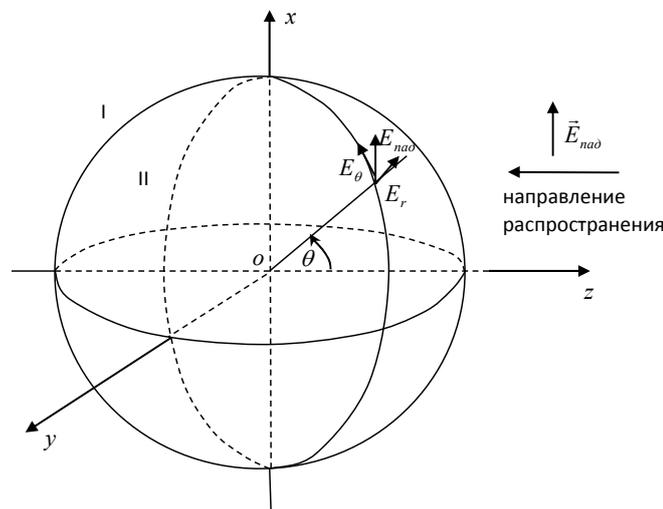


Рис.1. Геометрия задачи

Граничные условия на поверхности сферы отражают непрерывность тангенциальных компонент поля:

$$E_r^{(I)} = E_r^{(II)}, H_r^{(I)} = H_r^{(II)} \quad (2)$$

при  $r = a$ . Полное электрическое поле вне сферы есть сумма падающего ( $E^{(i)}$ ) и рассеянного ( $E^{(s)}$ ):  $\vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)}$ , внутри сферы  $\vec{E} = \vec{E}^{(w)}$ . Аналогичные выражения справедливы для магнитного вектора. С учетом составляющих сферической системы координат граничные условия (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^{(I)} &= E_\theta^{(II)} \\ E_\varphi^{(I)} &= E_\varphi^{(II)} \\ H_r^{(I)} &= H_r^{(II)} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Для описания составляющих поля падающей волны воспользуемся решениями уравнений Максвелла из [7]:

$$E_r = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{3/2}} P_l^1(\cos \theta) e^{-i(\pi/2-\varphi)}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{i(1+\cos \theta)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_1 \frac{\cos^2 \frac{\pi l}{2}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[ \frac{Z_{l+3/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} - (l+1) \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{3/2}} \right] P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) e^{-i(\pi/2-\varphi)} + \\ &+ \frac{i(1+\cos \theta)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_2 \sin^2 \frac{\pi l}{2} \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) e^{-i(\pi/2-\varphi)}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{-(1+\cos \theta)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_1 \frac{\sin^2 \frac{\pi l}{2}}{\sqrt{l(l+1)}} \left[ \frac{Z_{l+3/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} - (l+1) \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{3/2}} \right] P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) e^{-i(\pi/2-\varphi)} - \\ &- \frac{(1+\cos \theta)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} C_2 \cos^2 \frac{\pi l}{2} \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) e^{-i(\pi/2-\varphi)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Z_{l+1/2}(kr)$  - цилиндрическая функция;  $P_l^1(\cos \theta)$  - присоединенная функция Лежандра;  $P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta)$  - полином Якоби;  $A_l, C_1, C_2$  - постоянные коэффициенты.

Определение постоянных коэффициентов  $A_l$  проведено на основании ортогональности присоединенных функций Лежандра и формулы Бауэра

$$e^{-kr \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{(kr)^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} (2l+1) \psi_l(kr) P_l^1(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (7)$$

где  $\psi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{l+1/2}(kr)$ ,  $J_{l+1/2}(kr)$  - функция Бесселя 1-го рода. Сравнивая (4)

и (7), учитывая, что  $E_r^{(i)} = e^{-ik^l r \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi$ , получим:  $A_l = i^{l-1} (2l+1)$ .

Отыскание постоянных коэффициентов  $C_1, C_2$  производится разложением компонент поля падающей волны  $E_\theta^{(i)} = e^{-ik^I r \cos \theta} \cos \theta \cos \varphi$ ,  $E_\varphi^{(i)} = -e^{-ik^I r \cos \theta} \sin \varphi$  в ряды по цилиндрическим функциям и полиномам Якоби аналогично (7). Из выражений (5), (6) видно, что в решении уравнений Максвелла для компонент  $E_\theta, E_\varphi$  одновременно существуют либо четные, либо нечетные члены. Поэтому определение коэффициентов  $C_1, C_2$  для этих составляющих проводится отдельно для четных и нечетных членов рядов с учетом ортогональности полиномов Якоби.

Сохраняя только нечетные члены для составляющих поля  $E_\theta, E_\varphi$ , запишем сферические компоненты поля падающей волны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(i)} &= \frac{1}{(k^I r)^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l (2l+1) \psi_l(k^I r) P_l^1(\cos \theta) \cos \varphi \\ E_\theta^{(i)} &= i \frac{(1+\cos \theta)}{k^I r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{-l} (2l+1)}{4} \psi_l(k^I r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin^2 \frac{\pi}{2} \cos \varphi \\ E_\varphi^{(i)} &= \frac{(1+\cos \theta)}{k^I r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{-l} (2l+1) \sqrt{l(l+1)} \sin^2 \frac{\pi}{2}}{4\sqrt{2}} \left[ \frac{\psi_l(k^I r)}{k^I r} + i \psi_l'(k^I r) \right] P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Составляющие поля волны, прошедшей внутрь сферы, можно записать, исходя из ранее приведенных рассуждений:

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(w)} &= \frac{1}{(k^{II} r)^2} \sum_{l=1}^{\infty} A_{1l} \cdot \psi_l(k^{II} r) P_l^1(\cos \theta) \cos \varphi \\ E_\theta^{(w)} &= i \frac{(1+\cos \theta)}{k^{II} r} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} \cdot \psi_l(k^{II} r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin^2 \frac{\pi}{2} \cos \varphi \\ E_\varphi^{(w)} &= \frac{(1+\cos \theta)}{k^{II} r} \sum_{l=1}^{\infty} A_{3l} \sin^2 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\psi_l(k^{II} r)}{k^{II} r} + i \psi_l'(k^{II} r) \right] P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для рассеянной волны справедливы выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(s)} &= \frac{1}{(k^I r)^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_{1l} \cdot \xi_l^{(1)}(k^I r) P_l^1(\cos \theta) \cos \varphi \\ E_\theta^{(s)} &= i \frac{(1+\cos \theta)}{k^I r} \sum_{l=1}^{\infty} B_{2l} \cdot \xi_l^{(1)}(k^I r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin^2 \frac{\pi}{2} \cos \varphi \\ E_\varphi^{(s)} &= \frac{(1+\cos \theta)}{k^I r} \sum_{l=1}^{\infty} B_{3l} \sin^2 \frac{\pi}{2} \xi_l^{(1)}(k^I r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $A_{1l}, A_{2l}, A_{3l}, B_{1l}, B_{2l}, B_{3l}$  - постоянные коэффициенты;  $\xi_l^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{l+1/2}^{(1)}(kr)$ ,  $H_{l+1/2}^{(1)}(kr)$  - функция Ганкеля 1-го рода.

Для определения постоянных коэффициентов в выражениях, описывающих рассеянную и прошедшую внутрь сферы ЭМВ, запишем граничные условия на поверхности сферы ( $r = a$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [E_r^{(i)} + E_r^{(s)}] &= \frac{\partial E_r^{(w)}}{\partial r} \\ k_1^I [E_\theta^{(i)} + E_\theta^{(s)}] &= k_1^{II} E_\theta^{(w)} \\ k_1^I [E_\varphi^{(i)} + E_\varphi^{(s)}] &= k_1^{II} E_\varphi^{(w)} \end{aligned} \right\}; \left. \begin{aligned} k_1^I [H_r^{(i)} + H_r^{(s)}] &= k_1^{II} H_r^{(w)} \\ \frac{\partial}{\partial r} [H_\theta^{(i)} + H_\theta^{(s)}] &= \frac{\partial H_\theta^{(w)}}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} [H_\varphi^{(i)} + H_\varphi^{(s)}] &= \frac{\partial H_\varphi^{(w)}}{\partial r} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Подставляя (8)-(10) в первую систему уравнений (11), получим следующие выражения для постоянных коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} A_{1l} &= i^l (2l+1) \frac{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^I a) - \psi_l'(k^I a) \xi_l^{(1)}(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \\ A_{2l} &= \frac{\hat{n} \cdot i^{-l} (2l+1)}{4} \frac{\xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^I a) - \psi_l'(k^I a) \xi_l^{(1)}(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \\ A_{3l} &= \frac{\hat{n} \cdot i^{-l} (2l+1) \sqrt{l(l+1)}}{4\sqrt{2}} \frac{\xi_l^{(1)'}(k^I a) Z_l(k^I a) - Z_l'(k^I a) \xi_l^{(1)}(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) Z_l(k^{II} a) - Z_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \end{aligned} \right\}; \quad (12)$$

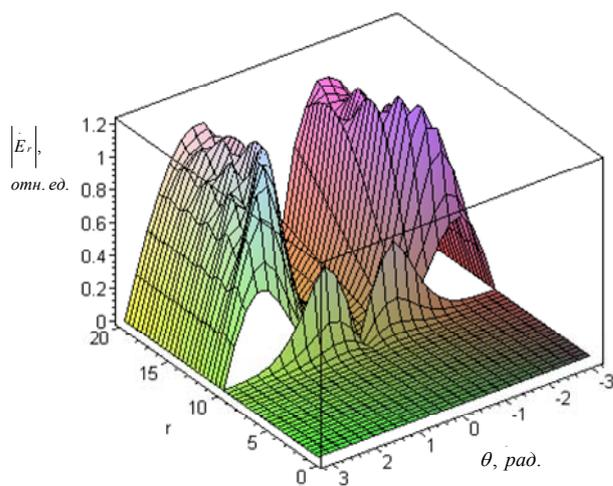
$$\left. \begin{aligned} B_{1l} &= -i^l (2l+1) \frac{\hat{n}^2 \psi_l'(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \psi_l(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \\ B_{2l} &= -\frac{i^{-l} (2l+1)}{4} \frac{\hat{n}^2 \psi_l'(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \psi_l(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) \psi_l(k^{II} a) - \psi_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \\ B_{3l} &= -\frac{i^{-l} (2l+1) \sqrt{l(l+1)}}{4\sqrt{2}} \frac{\hat{n}^2 Z_l'(k^I a) Z_l(k^{II} a) - Z_l'(k^{II} a) Z_l(k^I a)}{\hat{n}^2 \xi_l^{(1)'}(k^I a) Z_l(k^{II} a) - Z_l'(k^{II} a) \xi_l^{(1)}(k^I a)} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где  $Z_l(kr) = \psi_l(kr) + i \psi_l'(kr)$ ;  $\hat{n}^2 = \frac{k_1^{II}}{k_1^I} = \left( \frac{k^{II}}{k^I} \right)^2$ .

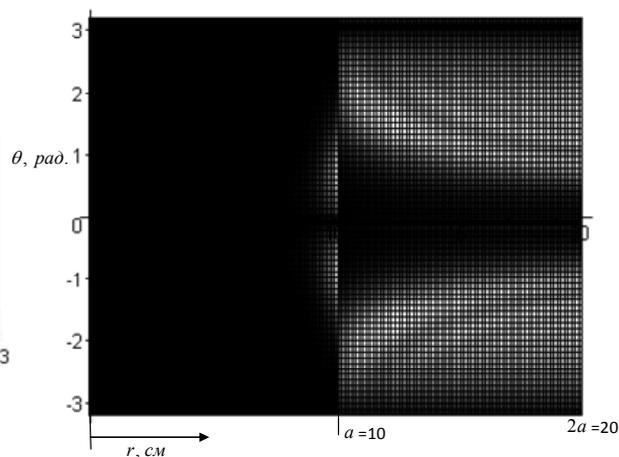
На рис.2 а на одном графике показано пространственное распределение амплитуды радиальной компоненты напряженности электрического поля

внутри сферы из ММ (для  $r = 0 \dots a$ ) и суммы падающего и рассеянного полей (полное поле) для  $r = a \dots 2a$  при изменении угла  $\theta$  от  $-\pi$  до  $\pi$  для радиуса сферы  $a = 10$  см на длине волны  $\lambda = 3,14$  см. Поле рассчитано по формулам (8)-(10) с учетом (12), (13). Ряды (8)-(10) сходятся медленно. Для 70-го члена ряда компоненты  $E_r^{(w)}$  величина малости порядка  $10^{-30}$ . Сфера представляет собой материал с отрицательной магнитной проницаемостью (MNG – материал)  $\mu' = -1,001 - i \cdot 0,001$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon' = 1$ . Черный фон на рис.2 б соответствует минимальной амплитуде поля, белый – максимальной. Аналогичные графики для тангенциальной компоненты  $E_\theta$  показаны на рис.3.

Из графиков следует, что поле внутри сферы для такого MNG-материала убывает быстро и ограничено поверхностью сферы и каустикой однократно преломленных лучей. Это согласуется с результатами расчетов работы [6]. Интересно поведение поля внутри сферы, заполненной ММ с отрицательной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon' = -1,001 + i \cdot 0,001$  (ENG-материал) и  $\mu' = 1$  (рис.4). Четко наблюдается зона фокусировки поля, сосредоточенного в области между поверхностью  $r = a$  и каустикой с точкой возврата, лежащей на оси  $oz$ .



а)



б)

Рис.2. Пространственное распределение амплитуды составляющей  $E_r$  напряженности электрического поля внутри сферы из ММ и суммы падающего и рассеянного полей (а); карта амплитуды поля в двумерном формате (б)

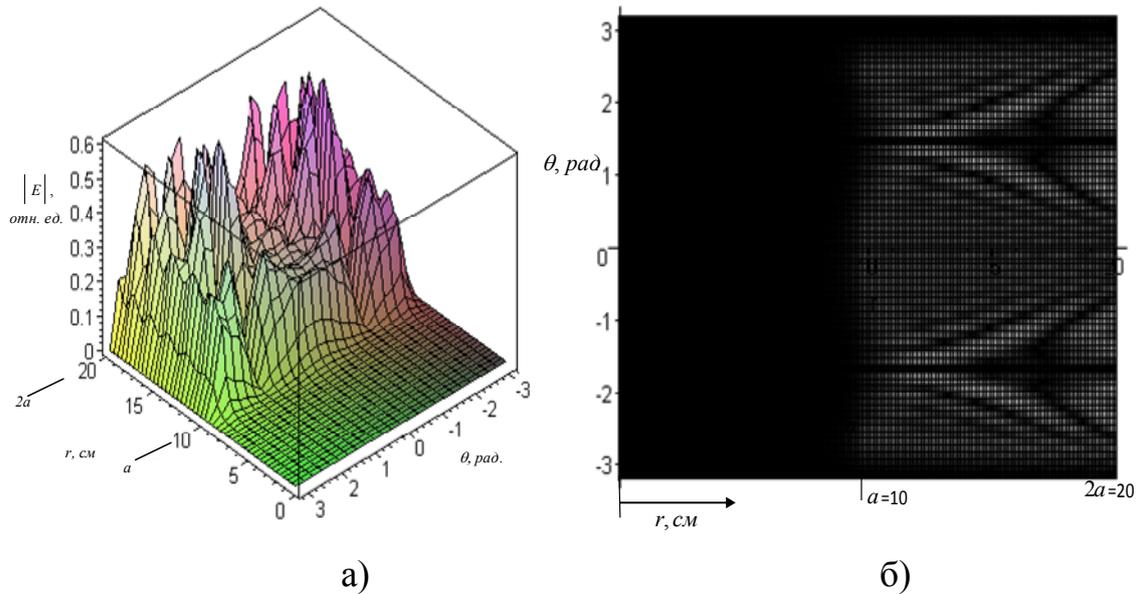


Рис.3. Пространственное распределение амплитуды тангенциальной компоненты  $E_\theta$  внутри сферы из ММ и суммы падающего и рассеянного полей (а); карта амплитуды поля в двумерном формате (б)

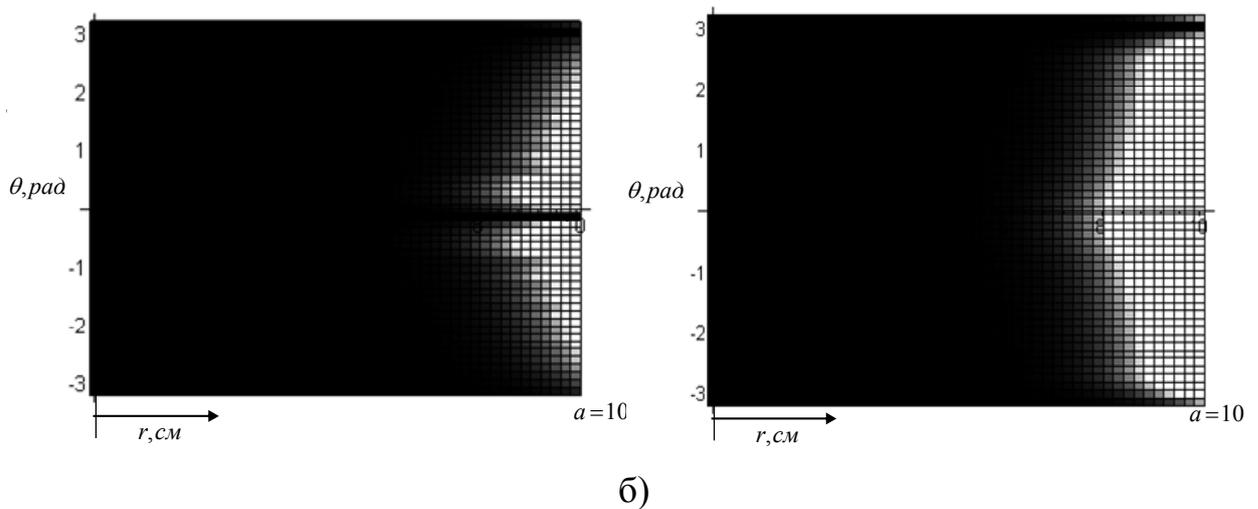
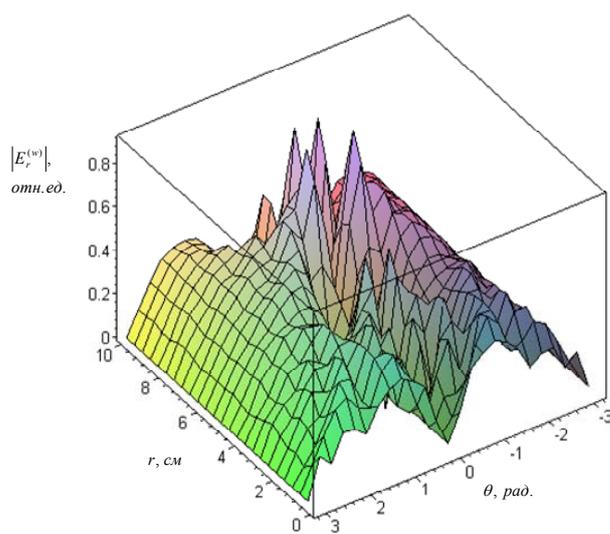


Рис.4. 2D-карты амплитуды поля  $E_r^{(w)}$  (а) и  $E_\theta^{(w)}$  (б) для сферы, имеющей  $\varepsilon' = -1,001 + i \cdot 0,001$  и  $\mu' = 1$  (ENG-материал)

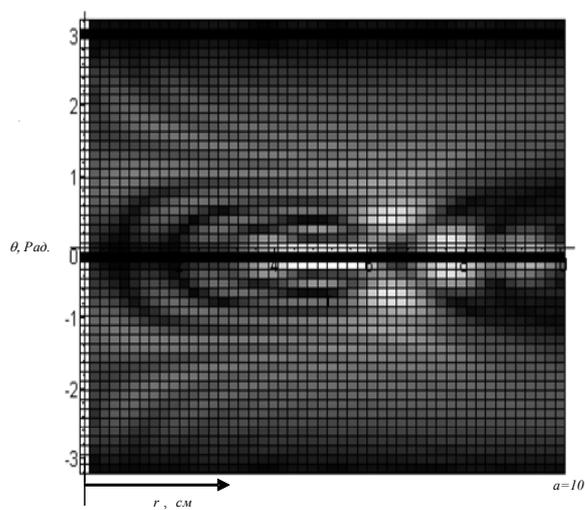
При заполнении сферы DNG-материалом с отрицательными относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon' = -1,5 + i \cdot 0,001$ ,  $\mu' = -1,5 - i \cdot 0,1$  (DNG – материал), внутри сферы наблюдается сложная картина поля (рис.5). Поле радиальной компоненты сконцентрировано вблизи параксиального фокуса сферы, тангенциальная компонента имеет выраженный максимум в узком угловом секторе вблизи поверхности.

Из решений (4) с учетом (10) следует, что рассеянное сферой поле, определяемое в дальней зоне составляющей  $E_\theta$ , описывается следующим выражением:

$$E_\theta^{(s)} \Big|_{\varphi=0} = \frac{2i}{(k^l r)} \sum_{l=1}^{\infty} B_{2l} \sin^2 \frac{\pi}{2} \xi_l^{(1)}(k^l r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta) + \frac{2}{(k^l r)} \sum_{l=1}^{\infty} B_{3l} \frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sqrt{l(l+1)}} \xi_l^{(1)'}(k^l r) P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta).$$



а)



б)

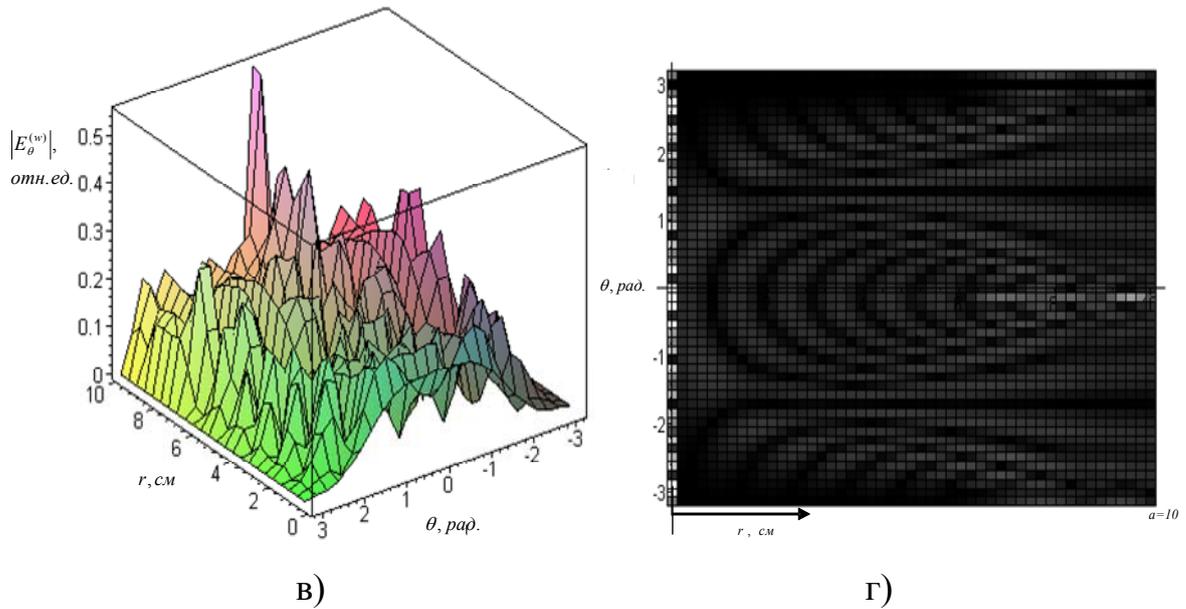


Рис.5. 3D-распределение и 2D-карты амплитуды поля  $E_r^{(w)}$  (а, б) и  $E_\theta^{(w)}$  (в, г) для сферы, имеющей  $\varepsilon' = -1,5 + i \cdot 0,001$ ,  $\mu' = -1,5 - i \cdot 0,1$  (DNG – материал)

С учетом асимптотических представлений функций  $\xi_l^{(1)}(kr) \approx (-i)^{l+1} e^{ikr}$ ,  $\xi_l^{(1)'}(kr) \approx (-i)^l e^{ikr}$  поле в дальней зоне

$$E_\theta^{(s)}|_{\varphi=0} = \frac{2}{(k^l)^2} S_{II}, \quad (14)$$

$$S_{II} = \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \left[ B_{2l} \sin^2 \frac{\pi l}{2} + B_{3l} \frac{\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi l}{2}}{\sqrt{l(l+1)}} \right] \times P_{l-1}^{(0,2)}(\cos \theta). \quad (15)$$

Действительная часть от (14) при  $\theta = 0$  определяет сечение экстинкции сферы, форма записи которой аналогична работам [8, 9]:

$$Q = \frac{2\pi}{(k^l)^2} \text{Re}(S_{II}). \quad (16)$$

Из графиков рассеянного поля на рис.6, рассчитанных по (14), (15) следует, что изменение комплексного коэффициента преломления среды, заполняющей сферу, приводит к существенному перераспределению уровня бокового излучения сферы при практически неизменной форме основного лепестка рассеяния.

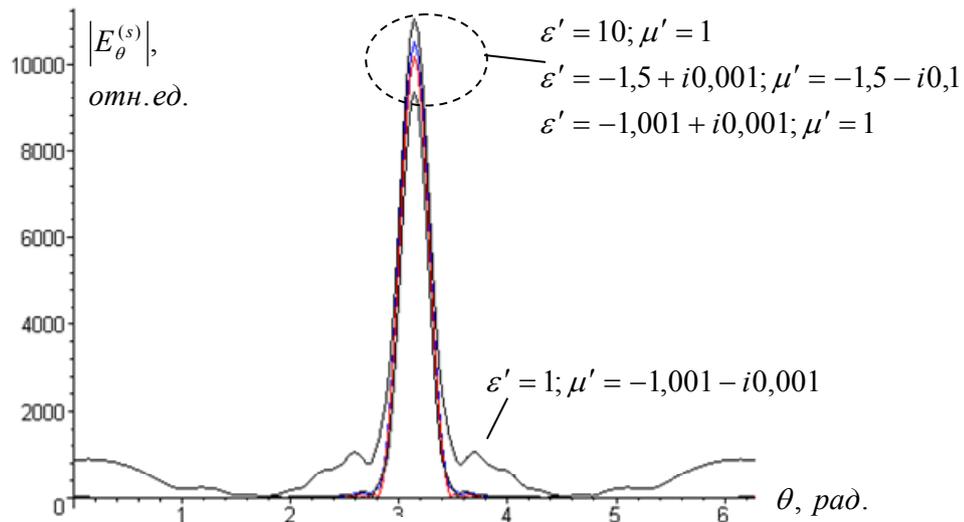


Рис.6. Рассеянное поле в дальней зоне от сферы, заполненной различным материалом: диэлектриком, метаматериалом DNG, ENG, MNG

Результаты расчета сечения экстинкции сферы по формуле (16) с учетом 70 членов ряда для сферы из DNG  $\epsilon' = -1,5 + i \cdot 0,001$ ,  $\mu' = -1,5 - i \cdot 0,1$ , представлены на рис.7. С увеличением радиуса сферы значение экстинкции стремится к  $0,085(k'a)^2 / 2 \cdot Q$ , что не согласуется с геометрикооптическим пределом экстинкции для диэлектрических сфер по [9, 10].

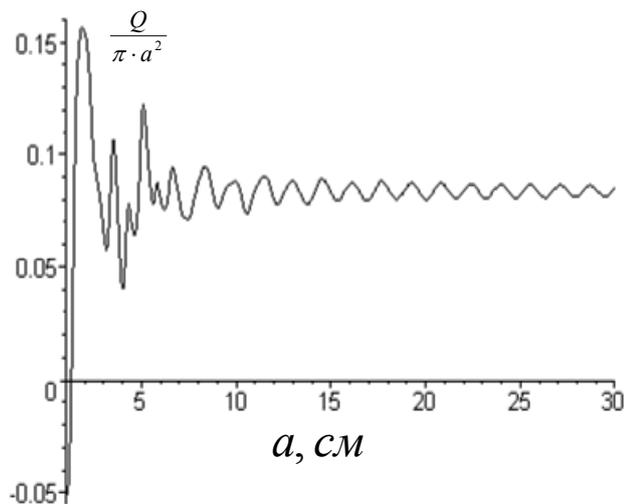


Рис.7. Сечение экстинкции сферы из метаматериала

Анализ свойств обобщенных сферических функций, используемых при решении уравнений Максвелла в сферической системе координат методом представления групп вращений показывает [7], что решения для составляющих поля  $E_\theta, E_\varphi$  можно выразить через присоединенные функции Лежандра. Общие члены рядов (4) для составляющих  $E_\theta, E_\varphi$  будут иметь вид:

$$E_\theta = -\frac{C_1 \sqrt{2} \cos \varphi}{l(l+1)\sqrt{\pi(2l+1)}} \left[ \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{2(kr)^{3/2}} + \frac{Z'_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} \right] \times \frac{dP_l^1(\cos \theta)}{d\theta} - \frac{C_2 \cos \varphi}{\sqrt{2\pi l(l+1)(2l+1)}} \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} \frac{P_l^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (17)$$

$$E_\theta = -\frac{iC_1 \sqrt{2} \sin \varphi}{l(l+1)\sqrt{2l+1}} \left[ \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{2(kr)^{3/2}} + \frac{Z'_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} \right] \times \frac{P_l^1(\cos \theta)}{\sin \theta} - \frac{iC_2 \sin \varphi}{\sqrt{2\pi l(l+1)(2l+1)}} \frac{Z_{l+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}} \frac{dP_l^1(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (18)$$

Выражения (17), (18) совпадают с решениями Г. Ми, полученными с помощью потенциалов Дебая [9] или с решениями, полученными методом Бромвича. В то же время, наряду с аналогией дифракции ЭМВ на идеально проводящей сфере, полусферическом идеально проводящем отражателе [7] и плоскопараллельной линзе [10] в части описания физической картины поля на графиках рис.2-4, картина поля на рис.5 трудно поддается физической интерпретации. Математический аппарат дает корректные результаты для электрического радиуса сферы  $ka \gg 1$ . Остается открытым вопрос синтеза сферы из ММ, обеспечивающего поглощение СВЧ энергии в заданном диапазоне частот. Также требует проработки проблема практической реализации РПМ на основе сфер из ММ с требуемыми характеристиками поглощения.

Авторы благодарят д.т.н., профессора Б.А. Панченко (Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина) за ценные замечания и обсуждение результатов работы.

## Литература

1. Е.В. Головачева, И.Н. Иванова, Е.И. Грибникова, В.В. Махно. Расчет многослойных двухмерно-периодических дифракционных решеток из графена // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5529](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5529)
  2. Dong Y., and Itoh T. Promising Future of Metamaterials // IEE Microwave Magazine, March/April 2012, pp. 39-56.
  3. Панченко Б.А. Рассеяние и поглощение электромагнитных волн неоднородными сферическими телами. Монография. – М.: Радиотехника, 2013. – 264 с.
  4. Ghadarghadr S., Ahmadi A., and Mosallaei H. Negative Permeability-Based Electrically Small Antennas // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 7, 2008, pp. 13-17.
  5. Valagiannopoulos C.A. Effect of Cylindrical Scatterer With Arbitrary Curvature on the Features of a Metamaterial Slab Antenna // Progress in Electromagnetics Research, PIER 71, 2007, pp. 59-83.
  6. Анютин А.П. Дифракция плоской и цилиндрической волны на цилиндре из метаматериала // Радиотехника и электроника, 2011, т. 56, № 9, с. 1029-1043.
  7. Пономарев О.П. Решение уравнений Максвелла в сферической системе координат с использованием группы вращений. Приложение для сферических зеркальных антенн // Территориально распределенные радиотехнические системы охраны, №4, 2006, с.77-78.
  8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М: Наука, 1973. – 720 с.
  9. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
  10. Vodo P., Parimi P.V., Lu W.T., and Sridhar S. Applied Physics Letters, Vol. 86 (201108), 2005, pp. 1 – 3.
-

## References

1. E.V. Golovacheva, I.N. Ivanova, E.I. Gribnikova, V.V. Makhno Inzhenernyj vestnik Dona 2018, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5529](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5529).
2. Dong Y., and Itoh T. IEEE Microwave Magazine, March/April 2012, p.p. 39-56.
3. Panchenko B.A. Rasseyanie i pogloshchenie elektromagnitnykh voln neodnorodnymi sfericheskimi telami [Dispersion and absorption of electromagnetic waves by inhomogeneous spherical objects]: Radiotekhnika, 2013. 264 p.
4. Ghadarghadr S., Ahmadi A., and Mosallaei H. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 7, 2008, pp. 13-17.
5. Valagiannopoulos C.A. Progress in Electromagnetics Research, 71, 2007, pp. 59-83.
6. Anyutin A.P. Radiotekhnika i elektronika, 2011, t. 56, № 9, pp. 1029-1043.
7. Ponomarev O.P. Territorial'no raspredelennye radiotekhnicheskie sistemy okhrany, №4, 2006, pp.77-78.
8. Born M., Vol'f E. Osnovy optiki [Fundamentals of optical physics]: Nauka, 1973. 720 p.
9. Khenl Kh., Maue A., Vestpfal' K. Teoriya difraktsii [Diffraction theory]: Mir, 1964. 428 p.
10. Vodo P., Parimi P.V., Lu W.T., and Sridhar S. Applied Physics Letters, Vol. 86, 201108, 2005, pp. 1-3.