

Моделирование непрерывной траектории перемещения по узловым данным обратной связи при управлении с прогнозированием внешней нагрузки

А. В. Карпов¹, Н. И. Гданский^{2,3}

¹Московский политехнический университет, Москва

²Российский биотехнологический университет, Москва

³Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Аннотация: В статье рассматривается задача построения непрерывной траектории перемещения на основе данных обратной связи в системах управления с прогнозированием внешней нагрузки. Предлагается использование интерполяции кубическими сплайнами Фергюссона. Предложенный подход обладает вычислительной эффективностью и применим в системах адаптивного управления, включая управление вращательными движениями в недетерминированной среде.

Ключевые слова: управление, прогнозирующие модели, внешняя нагрузка, интерполяция, сплайн, траектория движения объекта управления.

1. Введение

Методы управления сложными техническими объектами с использованием прогнозирующих моделей является одним из современных трендов в теории автоматического управления. В основе применения прогнозирующих моделей лежит применение математической модели объекта управления, которая позволяет на основе анализа данных обратной связи прогнозировать его будущие состояния и рассчитывать такие управляющие воздействия на него, которые дают возможность оптимизировать его поведение по заданному качественному критерию. В настоящее время такие модели широко применяются, в частности, в различного рода беспилотных устройствах для улучшения их динамического поведения. Основными преимуществами такого метода адаптивного управления является его предсказательный характер и вытекающая из него возможность оптимизации технологического процесса [1–3].

При расширенной трактовке прогнозирования (не только поведения объекта управления, но и поведения внешней среды) данный принцип можно применять и в других областях автоматического управления. В частности,

предложено применять его при адаптивном управлении одностепенной системой с вращательным движением (валом) в недетерминированной внешней среде для прогнозирования внешней нагрузки.

В качестве общей аналитической формулы для обобщенной внешней нагрузки M , под которой понимается сумма моментов сил сопротивления и сил инерции, принята формульная зависимость вид $M = M(t; \varphi(t))$, отражающая зависимость данного момента сил как непосредственно от времени t , так и от функции угла поворота вала $\varphi(t)$ [4].

В качестве математической структуры обобщенной внешней нагрузки M порядка k предложено использовать вектор средних значений всех полных производных порядков от 0 до k функции $M(t; \varphi(t))$ по независимому параметру t : $\bar{M}^k = (M^0; M^1; \dots; M^k)$. Для того, чтобы выделить отдельно влияние t и $\varphi(t)$ на нагрузку M , в векторе $\bar{M}^k$ производится переход к частным производным по параметрам t и φ . Такие векторы названы силовыми. Рассмотрены модели порядков $k = 0, 1, 2$. При этом мгновенное значение функции $M(t; \varphi(t))$ может быть представлена как результат скалярного взаимодействия фиксированного вектора силовых характеристик $\bar{M}^k$ и переменных кинематических параметров вращения вала $M(t, \varphi(t)) = (\bar{M}^k, \bar{\varphi}^k)$. В данном скалярном произведении вектор $\bar{\varphi}^k(t)$ назван вектором кинематических характеристик модели порядка k (кинематическим вектором).

Для построения силовых векторов в моделях порядка $k = 0, 1, 2$ предложено использовать равенство работы $A_{\text{ин}}$ двигателя привода и работы сил сопротивления $A_{\text{ис}}$ на отрезке времени $[t_i; t_{i+1}]$: $A_{\text{ин}} = A_{\text{ис}}$. Работа привода $A_{\text{ин}}$ может быть всегда рассчитана по данным обратной связи на пройденных отрезках траектории. Работа сил сопротивления $A_{\text{ис}}$ при принятой модели внешней нагрузки задаётся в следующей интегральной форме вида:

$$A_{ic} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\overline{M}^k, \overline{\varphi}^k(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Применение данной интегральной зависимости для моделей порядков $k = 1, 2$ наталкивается на следующую проблему: характер изменения функции перемещения $\varphi(t)$ между узловыми точками траектории, которые присутствуют в данных обратной связи, неизвестен.

В работе [5] проведено сравнительное исследование, которое показало, что наиболее близки результаты для парциальных интегралов, составляющих общий интеграл для работы сил сопротивления, дают сплайны Фергюссона [6–8], которые на каждом отрезке траектории $[t_{i-1}; t_i]$ длины $h = t_i - t_{i-1}$ с применением безразмерной нормированной переменной $u_i = (t - t_{i-1}) / h$ и узловых значений перемещений $(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$ и узловых значений первых производных перемещений $(\varphi'_{i-1}, \varphi'_i)$ могут быть представлены при помощи полиномов Эрмита $h_{1i}(u) - h_{4i}(u)$, в виде:

$$S_i(u) = \varphi_{i-1} h_{1i}(u) + \varphi_i h_{2i}(u) + h \varphi'_{i-1} h_{3i}(u) + h \varphi'_i h_{4i}(u).$$

Полиномы Эрмита имеют следующие формульные выражения и соответствующие узловые значения:

$$\begin{aligned} h_{1i}(u) &= (1 - 3u^2 + 2u^3); \quad h_{1i}(0) = 1; \quad h_{1i}(1) = 0; \quad h'_{1i}(0) = 0; \quad h'_{1i}(1) = 0; \\ h_{2i}(u) &= (3u^2 - 2u^3); \quad h_{2i}(0) = 0; \quad h_{2i}(1) = 1; \quad h'_{2i}(0) = 0; \quad h'_{2i}(1) = 0; \\ h_{3i}(u) &= (u - 2u^2 + u^3); \quad h_{3i}(0) = 0; \quad h_{3i}(1) = 0; \quad h'_{3i}(0) = 1; \quad h'_{3i}(1) = 0; \\ h_{4i}(u) &= (-u^2 + u^3); \quad h_{4i}(0) = 0; \quad h_{4i}(1) = 0; \quad h'_{4i}(0) = 0; \quad h'_{4i}(1) = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Для получения значения интегралов работы (1), наиболее приближенного к действительному значению, необходимо для сплайнов (2) на отдельных отрезках анализируемой траектории, которые строятся по дискретным измеряемым значениям $\{(\varphi_0; t_0), (\varphi_1; t_1), \dots, (\varphi_n; t_n)\}$, найти узловые значения первых производных $\{\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_n\}$.

Из теории интерполирования известно, что минимизацию осцилляции всей интерполирующей кривой, проходящей через узловые точки $\{(\varphi_0; t_0) - (\varphi_n; t_n)\}$, при которой наиболее близко моделируются реальные физические низкочастотные процессы, обеспечивает дополнительное наложение на кривую следующих краевых условий на вторые производные:

$$S_1''(\tau = 0) = S_n''(\tau = \tau_n) = 0. \quad (3)$$

Для определения узловых значений первых производных $\{\varphi'_0, \varphi'_1, \dots, \varphi'_n\}$ с учётом краевых условий (3) можно использовать обычные методы решения линейных систем, которые в лучшем случае имеют кубическую сложность $O(n^3)$ по числу отрезков n . Однако более рациональным с точки зрения понижения сложности является применение метода прогонки [9–10]. Рассмотрим его использование в данной задаче интерполирования.

2 Формирование системы уравнений для построение интерполяционной кривой путём расчёта узловых значений первых производных для непрерывной функции перемещения

Для этого вначале перейдем на участках $[0; h_i = t_i - t_{i-1}]$ к безразмерным нормированным параметрам $u_i = \tau / h_i = (t - t_i) / h_i$. Для данных параметров на краях отрезка: $u_i(t_{i-1}) = 0$; $u_i(t_i) = 1$. Внутри него при $t_{i-1} < t < t_i$: $0 < u_i(t) < 1$.

Если бы первые производные $S_i'(\tau)$ во внутренних узлах с номерами $i = 1, 2, \dots, n - 1$ были известны заранее, то построение общей интерполирующей сплайновой кривой при краевых условиях (3) сводится к построению n локальных сплайнов $S_i'(\tau)$ (2) на отрезках $[t_{i-1}; t_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для определения первых производных $S_i'(\tau)$ во внутренних узлах с номерами $i = 1, 2, \dots, n - 1$ используется условие непрерывности второй производной в данных внутренних узлах.

Зафиксируем внутренний узел t_i ($i = 1, \dots, n - 1$), в котором сплайн $S_i(t)$ соединяется со сплайном $S_{i+1}(t)$. Условие непрерывности второй производной в узле t_i принимает вид:

$$S_i''(t_i) = S_{i+1}''(t_i). \quad (4)$$

Переход к безразмерным нормированным переменным u_i и u_{i+1} на отрезках $[t_{i-1}; t_i]$ и $[t_i; t_{i+1}]$ позволяет записать сплайны $S_i(t)$ и $S_{i+1}(t)$ в явном виде при помощи полиномов Эрмита $h_{1i}(u) - h_{4i}(u)$ (2):

$$\begin{aligned} S_i(u_i) &= \varphi_{i-1}[1 - 3u_i^2 + 2u_i^3] + \varphi_i[3u_i^2 - 2u_i^3] + h_i S_{i-1}'[u_i - 2u_i^2 + u_i^3] + h_i S_i'[-u_i^2 + u_i^3]; \\ S_{i+1}(u_{i+1}) &= \varphi_i[1 - 3u_{i+1}^2 + 2u_{i+1}^3] + \varphi_{i+1}[3u_{i+1}^2 - 2u_{i+1}^3] + \\ &+ h_{i+1} S_i'[u_{i+1} - 2u_{i+1}^2 + u_{i+1}^3] + h_{i+1} S_{i+1}'[-u_{i+1}^2 + u_{i+1}^3] \end{aligned} \quad (5)$$

Производные по нормированным переменным u_i и u_{i+1} на отрезках $[t_{i-1}; t_i]$ и $[t_i; t_{i+1}]$ следующим образом связаны с производными по единой переменной t :

$$\begin{aligned} df/dt &= df/(h_i du_i) = (1/h_i) df/du_i; \\ d^2 f/dt^2 &= d^2 f/(h_i du_i)^2 = (1/h_i^2) d^2 f/du_i^2; \\ df/dt &= df/(h_{i+1} du_{i+1}) = (1/h_{i+1}) df/du_{i+1}; \\ d^2 f/dt^2 &= d^2 f/(h_{i+1} du_{i+1})^2 = (1/h_{i+1}^2) d^2 f/du_{i+1}^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя сплайны $S_i(t)$ и $S_{i+1}(t)$ (5) по t и обозначая разности $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$) получим следующие выражения для производных.

Первые производные сплайнов $S_i(t)$ и $S_{i+1}(t)$ по времени t :

$$\begin{aligned} S_i'(t) &= 6\varphi_{i-1}[-u_i + 6u_i^2]/h_i + \varphi_i[6u_i - 6u_i^2]/h_i + S_{i-1}'[1 - 4u_i + 3u_i^2] + \\ &+ S_i'[-2u_i + 3u_i^2] = 6\Delta\varphi_i[6u_i - 6u_i^2]/h_i + S_{i-1}'[1 - 4u_i + 3u_i^2] + S_i'[-2u_i + 3u_i^2]; \\ S_{i+1}'(t) &= \varphi_i[-6u_{i+1} + 6u_{i+1}^2]/h_{i+1} + \varphi_{i+1}[6u_{i+1} - 6u_{i+1}^2]/h_{i+1} + S_i'[1 - 4u_{i+1} + 3u_{i+1}^2] + \\ &+ S_{i+1}'[-2u_{i+1} + 3u_{i+1}^2] = 6\Delta\varphi_i[6u_{i+1} - 6u_{i+1}^2]/h_i + S_i'[1 - 4u_{i+1} + 3u_{i+1}^2] + \\ &+ S_{i+1}'[-2u_{i+1} + 3u_{i+1}^2] \end{aligned}$$

Вторые производные сплайнов $S_i(t)$ и $S_{i+1}(t)$ по t :

$$\begin{aligned} S_i''(t) &= \varphi_{i-1}[-6 + 12u_i]/h_i^2 + \varphi_i[6 - 12u_i]/h_i^2 + S_{i-1}'[-4 + 3u_i]/h_i + \\ &+ S_i'[-2 + 3u_i]/h_i = 6\Delta\varphi_i[1 - 2u_i]/h_i^2 + 2S_{i-1}'[-2 + 3u_i]/h_i + 2S_i'[-1 + 3u_i]/h_i; \end{aligned}$$

$$S_{i+1}''(t) = \varphi_i[-6 + 12u_{i+1}]/h_{i+1}^2 + \varphi_{i+1}[6 - 6u_{i+1}]/h_{i+1}^2 + S_i'[-4 + 6u_{i+1}]/h_{i+1} + \\ + S_{i+1}'[-2 + 6u_{i+1}]/h_{i+1} = 6\Delta\varphi_{i+1}[1 - 2u_{i+1}]/h_{i+1}^2 + 2S_i'[-2 + 3u_{i+1}]/h_{i+1} + \\ + 2S_{i+1}'[-1 + 3u_{i+1}]/h_{i+1};$$

В общей точке $t = t_i$ обоих сплайнов значения локальных переменных следующие: $u_i = 1, u_{i+1} = 0$. Отсюда для данной точки получим:

$$S_i''(1) = 6\Delta\varphi_i[1 - 2 \cdot 1]/h_i^2 + 2S_{i-1}'[-2 + 3 \cdot 1]/h_i + 2S_i'[-1 + 3 \cdot 1]/h_i; \\ S_{i+1}''(0) = 6\Delta\varphi_{i+1}[1 - 2 \cdot 0]/h_{i+1}^2 + 2S_i'[-2 + 3 \cdot 0]/h_{i+1} + 2S_{i+1}'[-1 + 3 \cdot 0]/h_{i+1} = \\ 6\Delta\varphi_{i+1}/h_{i+1}^2 - 4S_{i-1}'/h_{i+1} - 2S_i'/h_{i+1};$$

Приравниваем значения $S_i'(1)$ и $S_{i+1}'(0)$ в условии (4) для точки $t = t_i$:

$$-6\Delta\varphi_i/h_i^2 + 2S_{i-1}'/h_i + 4S_i'/h_i = 6\Delta\varphi_{i+1}/h_{i+1}^2 - 4S_{i-1}'/h_{i+1} - 2S_{i+1}'/h_{i+1};$$

Для получения уравнения связи для производных S_{i-1}' , S_i' и S_{i+1}' во внутренних узлах ($i = 1, \dots, n - 1$) умножим обе части выражения на $0,5h_{i+1}$, введем отношение $\mu_i = h_{i+1} / h_i$ ($i = 0, \dots, n - 1$) и постоянный коэффициент C_i :

$$-3\Delta\varphi_i\mu_i/h_i + S_{i-1}'\mu_i + 2S_i'\mu_i = 3\Delta\varphi_{i+1}/h_{i+1} - 2S_{i-1}' - S_{i+1}'; \\ S_{i-1}'\mu_i + 2S_i'(1 + \mu_i) + S_{i+1}' = 3(\Delta\varphi_i\mu_i/h_i + \Delta\varphi_{i+1}/h_{i+1}) = C_i; \quad (i = 1, \dots, n - 1) \quad (6)$$

Система (6) из $n - 1$ уравнения содержит $n + 1$ неизвестное – $\{S_0', S_1', \dots, S_n'\}$. Для получения замкнутой системы уравнений используем краевые условия $S_1''(u_1 = 0) = S_n''(u_n = 1) = 0$ (3), минимизирующие осцилляцию всей сплайновой кривой:

$$S_1''(0) = 6\Delta\varphi_1/h_1^2 - 4S_0'/h_1 - 2S_1'/h_1 = 0; \\ S_n''(1) = -6\Delta\varphi_n/h_n^2 + 2S_{n-1}'/h_n + 4S_n'/h_n = 0.$$

Умножим первое условие на $0,5h_1$, второе – на $0,5h_n$:

$$3\Delta\varphi_1/h_1 - 2S_0' - S_1' = 0; \\ -3\Delta\varphi_n/h_n + S_{n-1}' + 2S_n' = 0.$$

Отсюда получим следующие дополнительные уравнения к основной системе (6):

$$2S_0' + S_1' = 3\Delta\varphi_1/h_1 = C_0;$$

$$S'_{n-1} + 2S'_n = 3\Delta\varphi_n / h_n = C_n. \quad (7)$$

В итоге полная система уравнений для определения значений первых производных $S'_0, S'_1, \dots, S'_n$ принимает вид:

$$\begin{aligned} 2S'_0 + S'_1 &= C_0; C_0 = 3\Delta\varphi_1 / h_1; (i = 0); \\ \mu_i S'_{i-1} + 2(1 + \mu_i)S'_i + S'_{i+1} &= C_i; C_i = 3[\mu_i \Delta\varphi_i / h_i + \Delta\varphi_{i+1} / h_{i+1}]; (i = 1, \dots, n-1); \\ S'_{n-1} + 2S'_n &= C_n; C_n = 3\Delta\varphi_n / h_n; (i = n); \\ h_i &= (t_i - t_{i-1}); (i = 1, \dots, n); \\ \Delta\varphi_i &= (\varphi_i - \varphi_{i-1}); (i = 1, \dots, n); \\ \mu_i &= h_{i+1} / h_i; (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (8)$$

В векторной форме:

$$\mathbf{A} \bar{S}' = \bar{C}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2(1 + \mu_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2(1 + \mu_{n-1}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \bar{S}' = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S'_{n-2} \\ S'_{n-1} \\ S'_n \end{pmatrix}; \bar{C} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{pmatrix}.$$

3 Решение полученной системы уравнений относительно вектора узловых значений первых производных

Матрица полученной системы линейных уравнений (9) является трёхдиагональной. Её определитель не равен нулю, следовательно, она всегда имеет решение. Для ее упрощенного решения применяют метод прогонки – один из вариантов метода Гаусса. Данный метод наряду с начальным расчетом вспомогательных структур (массивов $\{\Delta\varphi_i\}, \{h_i\}, \{\mu_i\}, \{C_i\}$) по формулам:

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, h_i = t_i - t_{i-1}, (i = 1, \dots, n),$$

$$\mu_i = h_{i+1} / h_i, (i = 1, \dots, n - 1),$$

$$C_0 = 3\Delta\varphi_1 / h_1; C_n = 3\Delta\varphi_n / h_n;$$

$$C_i = 3(\mu_i\Delta\varphi_i / h_i + \Delta\varphi_{i+1} / h_{i+1}) (i = 1, \dots, n - 1);$$

также имеет две последовательные основные фазы: 1) прямой ход и 2) обратный ход.

1. Прямой ход. Для всех величин S'_i , кроме последней S'_n ($i = 0, \dots, n - 1$) последовательно определяются их линейные зависимости от величин S'_{i+1} вида:

$$S'_i = \alpha_i S'_{i+1} + \beta_i; (i = 0, \dots, n - 1).$$

1. Из первого уравнения системы (8) ($i = 0$) следует:

$$S'_0 = -0.5S'_1 - 0.5C_0; \text{ т.е. } \alpha_0 = -0.5; \beta_0 = -0.5C_0.$$

2. Из внутренних уравнений системы (9) ($i = 1, \dots, n - 1$) с учётом зависимости $S'_{i-1}(S'_i)$ получается следующая система:

$$\mu_i S'_{i-1} + 2(1 + \mu_i)S'_i + S'_{i+1} = C_i;$$

$$S'_{i-1} = \alpha_{i-1}S'_i + \beta_{i-1}$$

Подставляя выражение $S'_{i-1}(S'_i)$ из второго равенства в первое, получим:

$$\mu_i \alpha_{i-1} S'_i + \mu_i \beta_{i-1} + 2(1 + \mu_i)S'_i + S'_{i+1} = C_i;$$

$$S'_i(2 + \mu_i(2 + \alpha_{i-1})) = -S'_{i+1} - \mu_i \beta_{i-1} + C_i;$$

$$S'_i = -S'_{i+1} / (2 + \mu_i(2 + \alpha_{i-1})) + (C_i - \mu_i \beta_{i-1}) / (2 + \mu_i(2 + \alpha_{i-1})).$$

Отсюда получим следующие расчётные формулы для коэффициентов зависимости $(\alpha_i; \beta_i)$ от $(\alpha_{i-1}; \beta_{i-1})$ при $(i = 1, \dots, n - 1)$:

$$S'_i = \alpha_i S'_{i+1} + \beta_i; \gamma = (2 + \mu_i(2 + \alpha_{i-1})); \alpha_i = -1 / \gamma; \beta_i = (C_i - \mu_i \beta_{i-1}) / \gamma. \quad (10)$$

2. Обратный ход. Вначале определяется величина производной S'_n в последнем узле. Для этого используется последнее уравнение системы (8) и уже известная линейная зависимость $S'_{n-1} = S'_{n-1}(S'_n)$. Получаемая система имеет вид:

$$S'_{n-1} + 2S'_n = C_n;$$

$$S'_{n-1} = \alpha_{n-1}S'_n + \beta_{n-1}.$$

Из неё находим величину S'_n :

$$S'_n = (C_n - \beta_{n-1}) / (2 + \alpha_{n-1}).$$

Затем, последовательно подставляя значения $S'_n, S'_{n-1}, \dots, S'_1$ в уравнения (10), определяем все остальные искомые величины первой производной $S'_{n-1}, \dots, S'_0$:

$$S'_i = \alpha_i S'_{i+1} + \beta_i; (i = n - 1, \dots, 0).$$

Полученные в итоге значения первой производной $S'_0, S'_1, \dots, S'_n$ позволяют в единообразной форме непосредственно представить все сплайны $\{S_1(u_1), S_2(u_2), \dots, S_n(u_n)\}$ общей кривой, как функции от их локальных координат u_i :

$$S_i(u_i) = \varphi_{i-1}[1 - 3u_i^2 + 2u_i^3] + \varphi_i[3u_i^2 - 2u_i^3] + h_i S'_{i-1}[u_i - 2u_i^2 + u_i^3] + h_i S'_i[-u_i^2 + u_i^3]$$

5. Заключение

Рассмотрена постановка задачи о построении единой сплайновой кривой, проходящей через заданный набор её узловых точек, полученных в системе управления из данных обратной связи, а также дан эффективный с вычислительной точки зрения метод её решения.

Предположение о минимальной осцилляции всей интерполирующей кривой, проходящей через узловые точки $\{(\varphi_0; t_0) - (\varphi_n; t_n)\}$ и её гладкости второй степени в узловых точках позволяет по дискретным данным обратной связи построить правдоподобную единую непрерывную сплайновую кривую, наиболее близко моделирующую реальные физические низкочастотные процессы. В частности, такая кривая даёт наиболее близкие к реальным значения интегралов вида (1), которые используются при построении силовых векторов в моделях обобщённой внешней нагрузки, применяемых при управлении с её прогнозированием.

Получаемое в результате унифицированное представление интерполяционных кубических сплайнов через узловые значения функций, узловые значения ее первых производных, а также функций Эрмита позволяет формализовать и упростить выполнение последующих операций с данными сплайнами. Так, их применение на отдельных участках траектории перемещения позволяет заменить интегральные уравнения при формировании модели нагрузки на линейные алгебраические и, тем самым, существенно упростить их решений.

Литература

1. Morari, Manfred and Lee Jay H. Model predictive control: past, present and future. Computers & Chemical Engineering Vol. 23, 1999, pp. 667-682, URL: [sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135498003019](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135498003019).
2. Hebert Dan. Under the Hood with MPC. Control. URL: controlglobal.com/print/content/11380568.
3. Weiner Stan, McMillan Greg. Ruel Rules for Use of PID, MPC and FLC. Control. URL: controlglobal.com/print/content/11380502.
4. Гданский Н. И., Карпов А. В., Волков А. С. Математическая модель транспортного средства с независимым приводом всех движителей // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2012. № 13 (100). С. 107-109.
5. Гданский Н. И., Карпов А. В., Бугаенко А. А. Оптимальное интерполирование типовых динамик в задаче управления с прогнозированием // Инженерный вестник Дона. 2012. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/936.
6. Гданский Н.И., Карпов А.В., Бугаенко А.А. Алгоритм построения кубических интерполяционных сплайнов в задачах управления работой приводов с прогнозированием динамики нагрузки // Инженерный вестник Дона. 2012. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/935.

7. Короткий В. А. Кубические кривые в инженерной геометрии // Геометрия и графика. 2020. №. 3. С. 3-24.

8. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование: учебник для учреждений высш. проф. образования. М.: Издательский центр. «Академия», 2011. 272 с.

9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

10. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику / Под ред. А. И. Лобанова. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 504 с.

References

1. Morari, Manfred and Jay H. Lee. Model predictive control: past, present and future. Computers & Chemical Engineering Vol. 23, 1999, pp. 667-682, URL: [sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135498003019](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135498003019).

2. Hebert Dan. Under the Hood with MPC. Control. URL: controlglobal.com/print/content/11380568.

3. Weiner Stan, McMillan Greg. Ruel Rules for Use of PID, MPC and FLC. Control. URL: controlglobal.com/print/content/11380502.

4. Gdanskij N. I., Karpov A. V., Volkov A. S. Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2012. № 13 (100). pp. 107-109.

5. Gdanskij N. I., Karpov A. V., Bugaenko A. A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/936.

6. Gdanskij N.I., Karpov A.V., Bugaenko A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/935.

7. Korotkij V. A. Geometrija i grafika. 2020. №. 3. pp. 3-24.

8. Golovanov N. N. Geometricheskoe modelirovanie: uchebnik dlja uchrezhdenij vyssh. prof. Obrazovanija [Geometric modeling]. M.: Izdatel'skij centr. «Akademija», 2011. 272 p.



9. Samarskij A. A., Gulin A. V. Chislennyye metody [Numerical methods]. M.: Nauka, 1989. 432 p.

10. Fedorenko R. P. Vvedenie v vychislitel'nuju fiziku [Introduction to Computational Physics]. Dolgoprudnyj: Izdatel'skij dom «Intellekt», 2008. 504 p.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 6.10.2025

Дата публикации: 26.11.2025