

Экспериментальные данные о прочности и деформативности бетона класса В25 с учётом различной скорости нагружения призматических образцов при центральном сжатии

С.В. Коуркин, А.И. Никулин

Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова

Аннотация: В работе представлен анализ экспериментальных данных, отражающих влияние скорости нагружения на прочностные и деформативные характеристики бетона класса В25 в условиях центрального сжатия. Для исследования подготовлены и испытаны 12 призматических образцов с габаритами 100×100×400 мм, распределённых по трём сериям с различной скоростью приложения нагрузки. Статистическая обработка данных, включающая анализ дисперсий и построение регрессионных моделей, позволила не только прогнозировать поведение бетона при различных режимах нагружения, но и подтвердить теоретические предпосылки, связанные с динамическим упрочнением материала. Высокие значения коэффициентов корреляции (до 0,9943) и детерминации (до 0,9922), а также критерий Фишера, существенно превосходящий табличные пороги, характеризуют высокую достоверность полученных результатов, свидетельствующих о повышении прочности бетона при увеличении скорости нагружения и одновременном снижении его деформативности. Выведенные зависимости могут служить экспериментальной базой для разработки нелинейной деформационной методики расчёта изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных конструкций, выполненных из бетона данного класса (В25), подверженных воздействиям кратковременной длительности, включая классические статические нагрузки, а также динамические нагрузки средней продолжительности, характерные для условий эксплуатации конструкций под влиянием таких факторов, как движение мостовых кранов по подкрановым балкам или проезд пожарных автомобилей по путепроводу. Полученные результаты способствуют более точному учёту динамических эффектов при проектировании и расчёте железобетонных конструкций, эксплуатируемых в подобных условиях.

Ключевые слова: эксперимент, бетонные образцы, центральное сжатие, скорость нагружения, прочность, предельные относительные деформации, динамическое упрочнение, корреляционно-регрессионный анализ.

Введение

Исследование зависимости прочностных и деформационных характеристик бетона от скорости нагружения остаётся одной из приоритетных задач строительной науки, поскольку напрямую связано с обеспечением долговечности и эксплуатационной безопасности железобетонных конструкций, работающих в условиях динамического и ударного воздействия. Особое значение приобретает анализ поведения бетона класса В25, который традиционно используется в массовом

строительстве благодаря оптимальному сочетанию прочности и технологичности. Хотя в литературе представлены различные теоретические модели деформирования бетона при ускоренном его нагружении, подтверждение их достоверности требует привлечения новых экспериментальных данных, позволяющих более надёжно прогнозировать динамическое упрочнение материала и корректировать методы инженерного проектирования.

В настоящей работе осуществлены экспериментальные исследования бетонных призматических образцов, а полученные результаты подвергнуты комплексной обработке с использованием методов графической интерпретации, статистического анализа и аппроксимации функций. Такой интегрированный подход позволил охарактеризовать материал в разных режимах центрального сжатия и выявить закономерности, определяющие его поведение при ускоренном нагружении.

Ключевым элементом обработки результатов испытаний бетонных образцов стал корреляционно-регрессионный анализ, базирующийся на применении метода наименьших квадратов. Дополнительным инструментом стали дисперсионный анализ и проверка статистической значимости гипотез, что обеспечило высокую степень достоверности выводов. Итогом явилось построение адекватных математических моделей, отражающих процесс динамического упрочнения бетона класса В25 при повышении скорости нагружения.

1. Результаты проведения физического эксперимента

В рамках эксперимента были подготовлены двенадцать образцов из бетона класса В25 по прочности на сжатие, сгруппированных в три серии по четыре элемента. Для образцов была выбрана призматическая форма с габаритными размерами 100×100×400 мм [1, 2].

Для каждой из трёх серий образцов был принят индивидуальный режим нагружения, отличающийся по средней скорости приложения нагрузки до момента разрушения [3–5]. Образцы первой серии испытывались в стандартном статическом режиме с постепенным увеличением нагрузки шагами по 10% от ожидаемого предела прочности, при этом скорость нагружения на каждом шаге не превышала 0,01 МПа/с.

Во второй серии скорость нагружения задавалась с целью обеспечения разрушения образцов в максимально короткий промежуток времени. Время приложения нагрузки варьировалось от 1 до 3 секунд, при средней скорости роста напряжений около 10 МПа/с.

Для изучения влияния скорости нагружения на напряжённо-деформированное состояние бетонных образцов при центральном сжатии, третья серия испытывалась с продолжительностью нагружения от 8 до 12 секунд, при средней скорости приложения нагрузки порядка 2 МПа/с.

Для проведения статических испытаний использовался гидравлический пресс модели «ПММ-125». Скоростное нагружение реализовывалось на универсальной испытательной установке «Hydraulic Universal Testing Machine» модели WEW-600. Измерение деформаций сжатия выполнялось цифровыми индикаторами часового типа (ИЧЦ) модели LB-Q12 с шагом отсчёта 0,0005 мм, точностью 20 мкм и диапазоном измерений до 12 мм, при этом отсчёты велись относительно предварительно обнуленного значения. Подготовленные образцы представлены на рис. 1.



Рис. 1 – Экспериментальные образцы

Сводные экспериментальные данные по каждой из трёх серий испытаний приведены в таблицах 1–3, где представлены усреднённые значения измеренных параметров, отражающие влияние скорости нагружения на поведение бетонных образцов.

Таблица № 1

Напряженно-деформированное состояние бетонных образцов 1-ой серии при статическом нагружении

Напряжение σ , кПа	Порядковый номер образца			
	Относительные деформации в конце каждого этапа ϵ_0 , %			
	То же, после 10 мин выдержки на этапе ϵ_{10} , %			
	1-ый	2-ой	3-ий	4-ый
0	<u>0,0000</u>	<u>0,0000</u>	<u>0,0000</u>	<u>0,0000</u>
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1500	<u>0,048</u>	<u>0,0077</u>	<u>0,0031</u>	<u>0,0033</u>
	0,048	0,0077	0,0031	0,0033
3000	<u>0,0101</u>	<u>0,0113</u>	<u>0,0072</u>	<u>0,0069</u>
	0,0101	0,0113	0,0072	0,0076
4500	<u>0,0136</u>	<u>0,0154</u>	<u>0,0109</u>	<u>0,0106</u>
	0,0136	0,0154	0,0109	0,0106
6000	<u>0,0174</u>	<u>0,0200</u>	<u>0,0151</u>	<u>0,0142</u>
	0,0182	0,0200	0,0151	0,0143
7500	<u>0,0233</u>	<u>0,0262</u>	<u>0,0196</u>	<u>0,0189</u>
	0,0234	0,0262	0,0196	0,0189
9000	<u>0,0264</u>	<u>0,0296</u>	<u>0,0236</u>	<u>0,0224</u>
	0,0264	0,0297	0,0239	0,0230
10500	<u>0,0309</u>	<u>0,0359</u>	<u>0,0293</u>	<u>0,0278</u>
	0,0321	0,0374	0,0295	0,0292
12000	<u>0,0377</u>	<u>0,0409</u>	<u>0,0342</u>	<u>0,0333</u>
	0,0391	0,0426	0,0349	0,0362
13500	<u>0,0433</u>	<u>0,0489</u>	<u>0,0414</u>	=
	0,0453	0,0509	0,0432	-
15000	<u>0,0500</u>	<u>0,0548</u>	<u>0,0475</u>	=
	0,0517	0,0691	0,0496	-
16500	<u>0,0640</u>	=	<u>0,0608</u>	=
	0,0684	-	0,0644	-
18000	<u>0,0785</u>	=	<u>0,0755</u>	=
	0,0898	-	0,0890	-

Таблица № 2

Напряженно-деформированное состояние образцов 2-ой серии при нагружении со средней скоростью увеличения напряжений 10,0 МПа/с

Порядковый номер образца			
Напряжение σ , кПа			
Относительные деформации ε_0 , %			
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый
<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000
<u>5247</u> 0,0065	<u>2073</u> 0,0068	<u>3373</u> 0,0048	<u>2727</u> 0,0050
<u>8011</u> 0,0125	<u>4170</u> 0,0126	<u>4563</u> 0,0068	<u>5481</u> 0,0106
<u>10475</u> 0,0186	<u>9044</u> 0,0269	<u>5857</u> 0,0089	<u>8519</u> 0,0176
<u>12703</u> 0,0248	<u>13210</u> 0,0405	<u>6866</u> 0,0106	<u>12043</u> 0,0284
<u>14867</u> 0,0321	<u>17140</u> 0,0562	<u>8240</u> 0,0139	<u>14308</u> 0,0353
<u>16907</u> 0,0395	<u>20710</u> 0,0711	<u>9817</u> 0,0178	<u>16790</u> 0,0425
<u>18819</u> 0,0450	= -	<u>13745</u> 0,0274	<u>19239</u> 0,0573
<u>22559</u> 0,0601	= -	<u>17695</u> 0,0409	<u>21357</u> 0,0695
<u>24603</u> 0,0759	= -	<u>20861</u> 0,0524	<u>23012</u> 0,0778

До этапа корреляционно-регрессионного анализа проведена предварительная обработка экспериментальных данных, включавшая проверку результатов, полученных на каждом уровне нагружения, на соответствие правилу трёх сигм, позволяющему верифицировать данные и гарантировать корректность формирования массива значений для последующего моделирования взаимосвязей между исследуемыми параметрами.

Таблица № 3

Напряженно-деформированное состояние бетонных образцов 3-ей серии при нагружении со средней скоростью увеличения напряжений 2,0 МПа/с

Порядковый номер образца			
Напряжения σ , кПа			
Относительные деформации ε_0 , %			
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый
<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000
<u>2634</u> 0,0055	<u>2148</u> 0,0034	<u>2616</u> 0,0046	<u>2174</u> 0,0048
<u>5206</u> 0,0111	<u>4332</u> 0,0082	<u>4594</u> 0,0095	<u>4224</u> 0,0090
<u>7718</u> 0,0183	<u>6258</u> 0,0135	<u>6116</u> 0,0119	<u>6336</u> 0,0133
<u>10030</u> 0,0252	<u>8604</u> 0,00197	<u>8406</u> 0,0170	<u>8931</u> 0,0197
<u>12630</u> 0,0335	<u>10600</u> 0,0250	<u>10450</u> 0,0234	<u>10790</u> 0,0252
<u>15240</u> 0,0428	<u>12790</u> 0,0316	<u>12610</u> 0,0283	<u>12950</u> 0,0326
<u>17640</u> 0,0526	<u>15460</u> 0,0397	<u>15290</u> 0,0361	<u>15420</u> 0,0443
<u>20170</u> 0,0662	<u>17580</u> 0,0504	<u>17730</u> 0,0482	<u>17500</u> 0,0578
<u>22370</u> 0,0931	<u>19760</u> 0,0723	<u>19543</u> 0,0656	<u>18900</u> 0,0700

2. Корреляционно-регрессионный анализ полученных данных

Для построения уравнения регрессии была применена ключевая теоретическая предпосылка регрессионного анализа [6, 7], заключающаяся в том, что функция регрессии $f(x) = \bar{y}(x)$ среди всего множества действительных функций обеспечивает наименьшее значение математического ожидания квадрата отклонений случайной величины $M([Y - f(x)]^2)$.

С учётом того, что наилучшее соответствие экспериментальным данным при описании поведения бетона под нагрузкой достигается при использовании полиномиальной аппроксимации второго порядка, в качестве регрессионной модели принята параболическая зависимость, выражаемая формулой (1):

$$\bar{y}(x) = a + bx + cx^2, \quad (1)$$

где параметры a , b и c представляют собой неизвестные коэффициенты регрессионной зависимости, значения которых вычисляются посредством применения метода наименьших квадратов, что отражено в формуле (2).

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1} (\bar{y}_i - (a + bx + cx^2))^2 n_{xi} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Функция $S(a, b, c)$ принимает минимум в тех случаях, когда значения коэффициентов a , b и c определяются из системы уравнений (3), приведённой ниже:

$$\begin{cases} na + b \sum x + c \sum x^2 = \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 = \sum yx \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 = \sum yx^2 \end{cases} \quad (3)$$

В матричном представлении (4) полученная система уравнений принимает следующий вид:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum yx \\ \sum yx^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где \bar{X} - исходная матрица, а \bar{Y} - свободные члены.

Определение параметров a , b и c уравнения регрессии выполнялось с использованием метода определителей, при котором частные определители Δa , Δb и Δc соотносятся с главным определителем Δ . Соответствующая зависимость приведена в формуле (5):

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; b = \frac{\Delta b}{\Delta}; c = \frac{\Delta c}{\Delta}, \quad (5)$$

где Δa , Δb , и Δc - определители матриц \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} , соответственно. Эти матрицы формируются на основе исходной матрицы \bar{X} путём последовательной замены каждого i -го столбца исходной матрицы на столбец матрицы свободных членов \bar{Y} , по циклу от 1 до n , как указано далее:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \sum y & \sum x & \sum x^2 \\ \sum yx & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum yx^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} n & \sum y & \sum x \\ \sum x & \sum yx & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum yx^2 & \sum x^4 \end{pmatrix};$$
$$\bar{C} = \begin{pmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum yx \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum yx^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Определение детерминанта исходной матрицы Δ , а также детерминантов модифицированных матриц Δa , Δb , и Δc может выполняться тремя традиционными методами: с использованием формул Крамера, средствами матричного исчисления или методом Гаусса.

В процессе обработки экспериментальных данных в качестве факторного признака «X» рассматривались относительные деформации бетона ε , %, а в качестве результативного признака «Y» — нормальные напряжения сжатия σ , кПа.

Рассмотрим определение параметров a , b и c для уравнения регрессии образцов первой серии. Объемные вычисления второстепенных параметров $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum x^3$, $\sum x^4$, $\sum y$, $\sum yx$ и $\sum yx^2$ производились в Excel [8] и в статье не отражаются.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 50,00 & 1,48 & 0,072 \\ 1,48 & 0,072 & 0,004 \\ 0,072 & 0,004 & 0,0003 \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} 433500 \\ 19005,15 \\ 1068,83 \end{pmatrix}; \Delta = 0,000027;$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 433500 & 1,48 & 0,072 \\ 19005,15 & 0,072 & 0,004 \\ 1068,83 & 0,004 & 0,0003 \end{pmatrix}; \Delta a = -0,0041;$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 50,00 & 433500 & 0,072 \\ 1,48 & 19005,15 & 0,004 \\ 0,072 & 1068,83 & 0,0003 \end{pmatrix}; \Delta b = 11,218;$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 50,00 & 1,48 & 433500 \\ 1,48 & 0,072 & 19005,15 \\ 0,072 & 0,004 & 1068,83 \end{pmatrix}; \Delta c = -64,00;$$

$$a = \frac{-0,0041}{0,000027} = -149,7005; b = \frac{11,218}{0,000027} = 411007,3653; c = \frac{-64,00}{0,000027} = -2344864,1928.$$

Неизвестные коэффициенты регрессионных моделей для образцов второй и третьей серий были рассчитаны по той же методике, что и для первой серии. В результате для каждой серии было сформировано собственное уравнение регрессии, позволяющее отразить специфику взаимосвязей между исследуемыми величинами (таблица № 4).

Таблица № 4

Полученные уравнения регрессии

Серия образцов	Параболическая функция второго порядка
1-ая	$\bar{y}(x) = -149,7005 + 411007,3653x - 2344864,1928x^2$
2-ая	$\bar{y}(x) = 618,9958 + 508662,9938x - 2886693,6089x^2$
3-я	$\bar{y}(x) = 344,3987 + 474984,7817x - 2715604,6891x^2$

Для наглядного отображения полученных статистических данных была выполнена их аппроксимация регрессионными функциями, построенными по экспериментальным точкам на диаграммах рассеяния. Это позволило чётко зафиксировать выявленные зависимости [9]. Соответствующие графики представлены на рис. 2–4.

Построение уравнений регрессии сопровождается анализом зависимости результативного признака «Y» от факторного признака «X» с последующей оценкой силы данной зависимости. Для этого определяется теоретическое корреляционное отношение (7), которое вычисляется исходя из соотношений факторной, остаточной и общей дисперсий (8), (9).

Факторная дисперсия позволяет выделить часть изменчивости результативного признака «Y», обусловленную влиянием факторного признака «X». Общая дисперсия, включающая как факторную, так и остаточную составляющую, характеризует полное воздействие совокупности факторов на вариацию признака «Y» [10, 11].

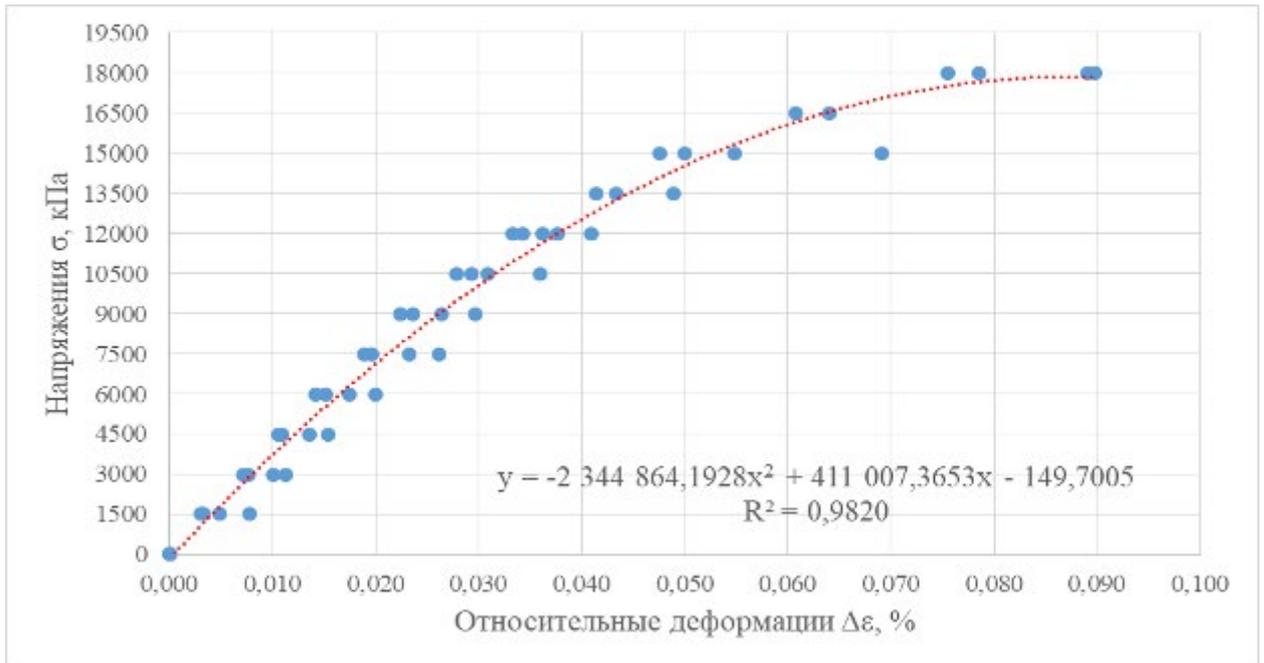


Рис. 2. – Линия регрессии образцов первой серии

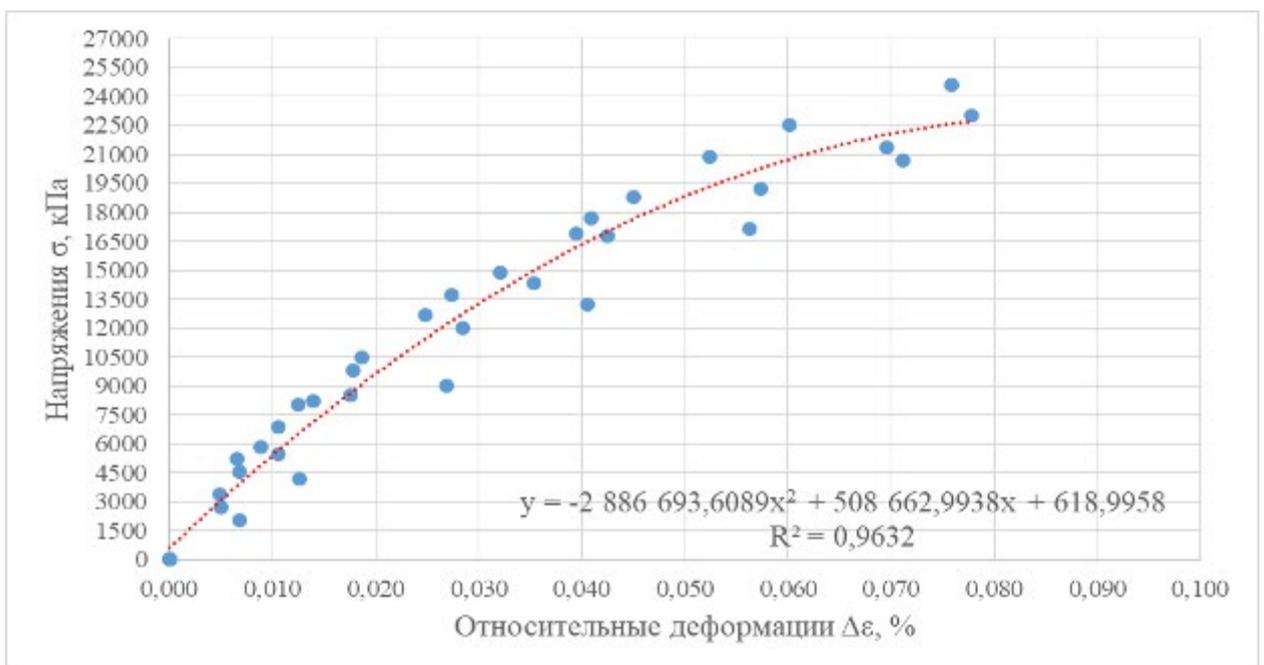


Рис. 3. – Линия регрессии образцов второй серии

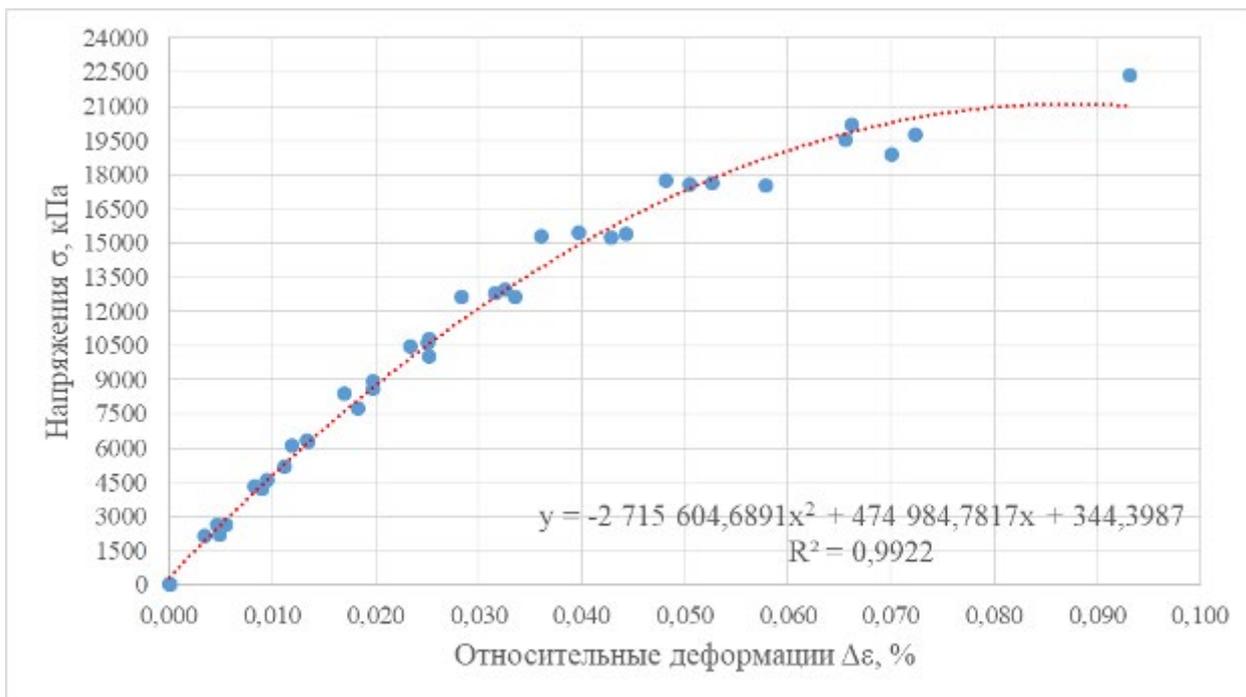


Рис. 4 – Линия регрессии образцов третьей серии

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{D_{\text{факт}}^2}{D_{\text{общ}}^2}}, \quad (7)$$

$$D_{\text{факт}}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_{(x)} - Y_{cp})^2 n_{xi}, \quad (8)$$

$$D_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_i - Y_{cp})^2 n_{yi}. \quad (9)$$

Определение степени влияния факторного признака на вариацию результативного осуществляется путём вычисления коэффициента детерминации $\eta_{y/x}$. Указанный коэффициент отражает долю общей дисперсии, объясняемую зависимостью между признаками, и определяется по формуле (10):

$$\eta_{y/x} = r_{y/x}^2. \quad (10)$$

Вычислим факторную и общую дисперсии для образцов первой серии, с целью нахождения коэффициентов корреляции и детерминации. Объемные вычисления второстепенных параметров $\sum Y_{(x)}$, $\sum Y_i$ и $\sum Y_{cp}$ производились в Excel и в статье не отражаются.

$$D_{\text{факт}}^2 = \sum (Y_{(x)} - Y_{cp})^2 = \sum Y_{(x)}^2 - \sum 2Y_{(x)}Y_{cp} + \sum Y_{cp}^2;$$

$$D_{\text{факт}}^2 = 52,40 \times 10^8 - 75,17 \times 10^8 + 37,59 \times 10^8 = 14,82 \times 10^8.$$

$$D_{\text{общ}}^2 = \sum (Y_i - Y_{cp})^2 = \sum Y_i^2 - \sum 2Y_iY_{cp} + \sum Y_{cp}^2;$$

$$D_{\text{общ}}^2 = 52,67 \times 10^8 - 75,17 \times 10^8 + 37,59 \times 10^8 = 15,09 \times 10^8.$$

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{14,82 \times 10^8}{15,09 \times 10^8}} = 0,9910;$$

$$\eta_{y/x} = 0,9910^2 = 0,9820.$$

В отношении образцов второй и третьей серий были проведены аналогичные вычислительные процедуры. Полученные значения дисперсий, а также рассчитанные коэффициенты корреляции и детерминации систематизированы и представлены в таблице № 5.

Таблица № 5

Дисперсия, корреляция и детерминация

Серия образцов	Дисперсия		Коэффициент	
	Факторная $D_{\text{факт}}^2$	Общая $D_{\text{общ}}^2$	Корреляции $r_{y/x}$	Детерминации $\eta_{y/x}$
1-ая	1481646784,61	1508805000,00	0,9910	0,9820
2-ая	1922525013,45	1996942697,89	0,9814	0,9632
3-я	1688496163,62	1701747503,50	0,9961	0,9922

Выводы

Экспериментальные испытания подтвердили наличие зависимости между скоростью нагружения и деформативно-прочностными характеристиками бетона класса В25. При увеличении скорости нагружения фиксируется рост предельной прочности материала при одновременном снижении величины относительных предельных деформаций, что отражает проявление эффекта динамического упрочнения.

Построенные регрессионные уравнения с коэффициентами детерминации в диапазоне 0,963–0,992 и индексами корреляции свыше 0,98 демонстрируют высокую адекватность аппроксимации экспериментальных данных.

Проведённый сравнительный анализ регрессионных кривых показал, что при возрастании скорости нагружения существенно увеличиваются значения напряжений при одинаковых относительных деформациях. Это указывает на высокую чувствительность бетона класса В25 к динамическим воздействиям.

Разработанные регрессионные зависимости могут быть использованы для инженерной оценки работы железобетонных конструкций при переменных и кратковременных нагрузках, включая сейсмические, ударные и транспортные воздействия.

Полученные результаты формируют основу для дальнейших исследований, связанных с уточнением параметров моделей, расширением экспериментальной базы и анализом влияния дополнительных факторов (состав смеси, условия твердения, армирование, температурно-влажностный режим). Это позволит более глубоко понять механизмы изменения свойств бетона класса В25 и повысить надёжность железобетонных конструкций в реальных условиях эксплуатации.

Литература

1. Перцев В. Т., Козодаев С. П., Ткаченко Т. Ф., Усачев С. М. Технология бетона, строительных изделий и конструкций: учебное пособие. 2-е изд., доп. Воронеж: ВГТУ, 2018. 123 с.
2. Neville A. M. Properties of Concrete. 5th ed. Harlow: Pearson Education, 2011. 844 p.
3. Копылова И. Б. Методы обработки экспериментальных данных: учебное пособие. Благовещенск: АмГУ, 2017. 48 с.
4. Montgomery D. C. Design and Analysis of Experiments. 10th ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2020. 752 p.



5. Алексеев А. В., Киселёв С. В. Математическая статистика и обработка данных в инженерных исследованиях: учебное пособие. СПб.: СПбГАСУ, 2016. 152 с.
6. Kutner M. H., Nachtsheim C. J., Neter J., Li W. Applied Linear Statistical Models. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2005. 1396 p.
7. Seber G. A. F., Lee A. J. Linear Regression Analysis. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2012. 582 p.
8. Минашкин В. Г. Информационные технологии анализа данных: учебное пособие. М.: Финансы и статистика, 2010. 368 с.
9. Рябушкин Б. С. Математическая статистика: учебное пособие. М.: Академия, 2006. 432 с.
10. Field A. Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics. 5th ed. London: SAGE, 2018. 1100 p.
11. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 9-е изд. М.: ЛКИ, 2007. 447 с.

References

1. Pertsev V. T., Kozodaev S. P., Tkachenko T. F., Usachev S. M. Tekhnologiya betona, stroitel'nykh izdeliy i konstruktsiy: uchebnoe posobie [Concrete technology, building products and structures : textbook]. 2-e izd., dop. Voronezh : VGTU, 2018. 123 p.
 2. Neville A. M. Properties of Concrete. 5th ed. Harlow: Pearson Education, 2011. 844 p.
 3. Копылова И. В. Методы обработки экспериментальных данных: учебное пособие [Methods of experimental data processing : textbook]. Blagoveshchensk: AmGU, 2017. 48 p.
 4. Montgomery D. C. Design and Analysis of Experiments. 10th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2020. 752 p.
-



5. Alekseev A. V., Kiselev S. V. Matematicheskaya statistika i obrabotka dannykh v inzhenernykh issledovaniyakh: uchebnoe posobie [Mathematical statistics and data processing in engineering research : textbook]. Sankt-Peterburg: SPbGASU, 2016. 152 p.
6. Kutner M. H., Nachtsheim C. J., Neter J., Li W. Applied Linear Statistical Models. 5th ed. New York : McGraw-Hill, 2005. 1396 p.
7. Seber G. A. F., Lee A. J. Linear Regression Analysis. 2nd ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2012. 582 p.
8. Minashkin V. G. Informatsionnye tekhnologii analiza dannykh: uchebnoe posobie [Information technologies of data analysis: textbook]. Moskva: Finansy i statistika, 2010. 368 p.
9. Ryabushkin B. S. Matematicheskaya statistika: uchebnoe posobie [Mathematical statistics: textbook]. Moskva: Akademiya, 2006. 432 p.
10. Field A. Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics. 5th ed. London: SAGE, 2018. 1100 p.
11. Gnedenko B. V. Kurs teorii veroyatnostey [Course of probability theory]. 9-e izd. Moskva: LKI, 2007. 447 p.

Дата поступления: 26.07.2025

Дата публикации: 26.09.2025